Cycles et oscillations pour les edo autonomes

→ dimension 2

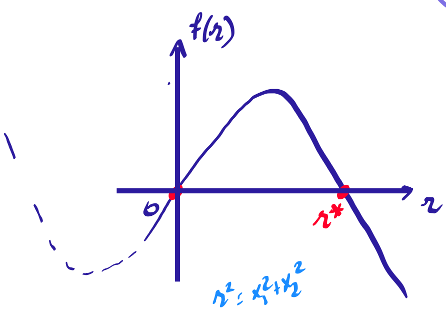
système d'edo autonome

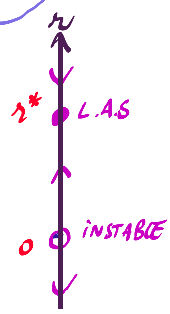
$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \alpha\left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right)x_1 \\ x_2' = -x_1 + \alpha\left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right)x_2 \end{cases}$$

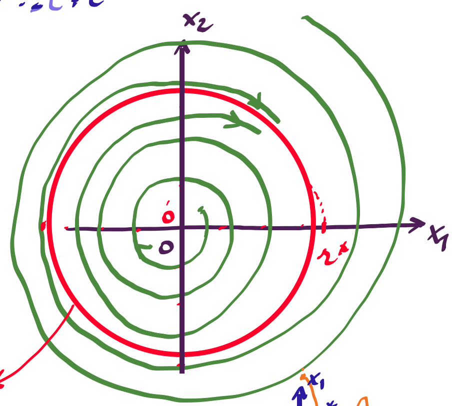
→ les coordonnées polaires permettent de simplifier le problème et d'obtenir le système :

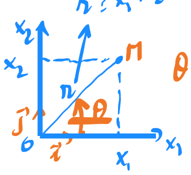
$$\begin{cases} r' = f(r) \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad , \; r(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in I$$

$\theta' = -1 \rightarrow \theta = -t + c$





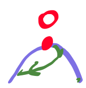


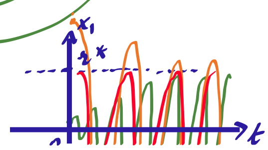


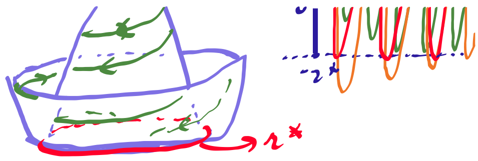
$\theta = (\vec{i}, \widehat{\vec{OM}})$

↻ + ↺ −

cycle limite stable



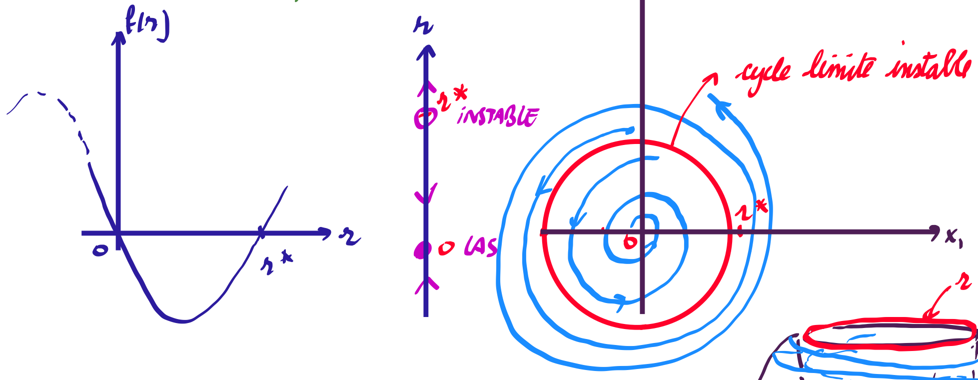


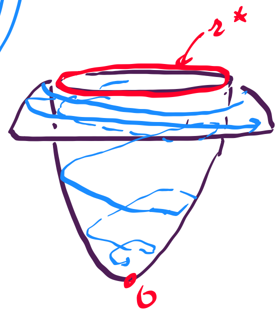

x*

autre exemple :

ici $\theta(t) > 0 \quad \forall t$

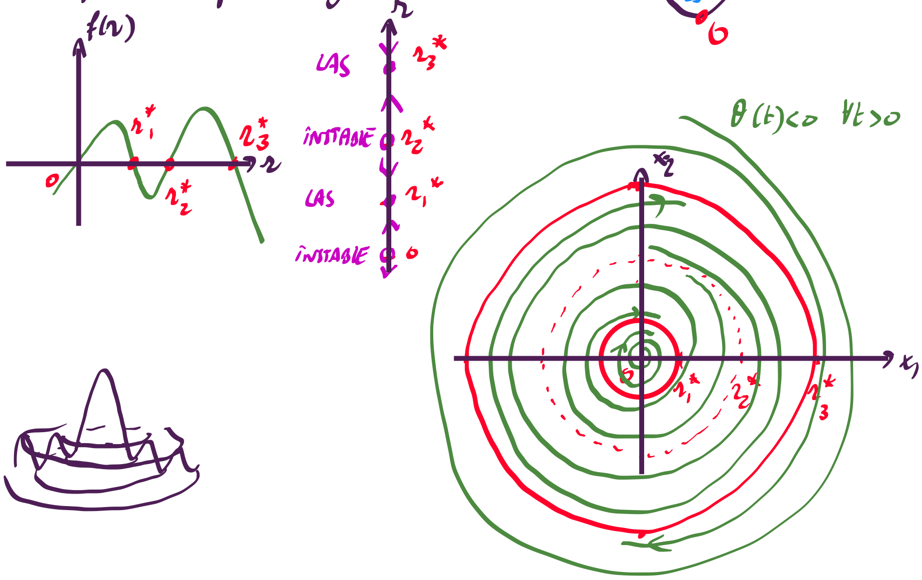
exemple





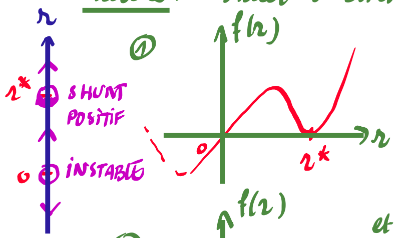
Remarque : on peut avoir plusieurs cycles limites

exemple :

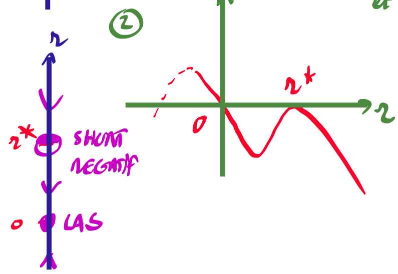


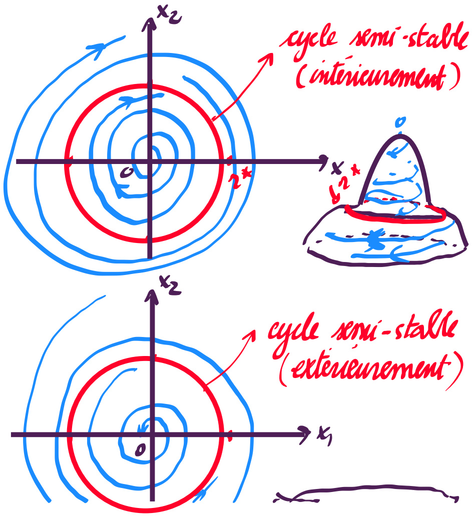
Exercice : tracer les orbites quand :

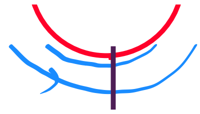
① et $\dot\theta(t) < 0 \ \forall t \in I$

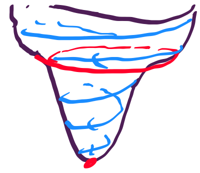


② et $\dot\theta(t) > 0 \ \forall t \in I$









<u>Remarque</u> :

On pourrait aussi avoir $z' = f_c(z)$ ← constante

constante qui peut engendrer de la bifurcation

↳ STEVEN STROGATZ (NON LINEAR DYNAMICS & CHAOS)

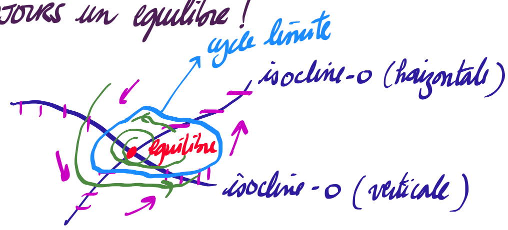
<u>Remarques</u> :

1. Par construction, les cycles de ces exemples sont des cercles, mais on peut trouver des cycles de toutes les formes (mais toujours fermé)

Par contre, ces exemples montrent tous les types de stabilité possibles (stable, instable, semi-stable (intérieurement ou extérieurement))

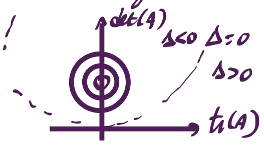
2. Par construction, les cycles de ces exemples contiennent TOUS un équilibre (x_1^*, x_2^*)

<u>C'est général</u> ! sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, un cycle contient TOUJOURS un équilibre !



3. Un cycle est dit <u>limite</u> s'il attire au moins une trajectoire.

<u>Attention</u> : les centres des systèmes linéaires sont des cycles mais pas des cycles <u>limites</u> !



C'est la différence essentielle en dimension 2, entre les systèmes linéaires et non-linéaires. En général, les cycles des systèmes non linéaires attirent ou repoussent les trajectoires "voisines" alors que ceux des systèmes linéaires sont neutres.

En dimension 2, les trajectoires ne peuvent <u>que</u> converger vers

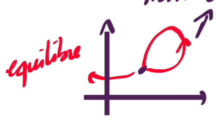
- un équilibre

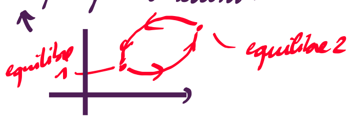
équilibre

. l'∞

. vers un cycle limite

. vers une réunion d'équilibres et les trajectoires homocliniques ou hétérocliniques qui les relient.



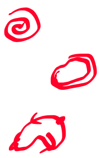


Le théorème qui le prouve est le :

__Théorème de POINCARÉ-BENDIXSON :__

On considère le système $X' = F(X)$ où $X \in \mathbb{R}^2$ et $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $F \in \mathcal{C}^1(D)$

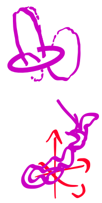
Alors, toute trajectoire __BORNÉE__ de ce système converge



① soit vers 1 équilibre

② " vers un cycle limite

③ soit vers une réunion de points selles reliés par des trajectoires homoclines ou hétéroclines



DIMENSION 2 → PAS DE CHAOS POSSIBLE

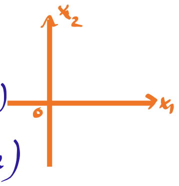
DIMENSION : oui on peut avoir du chaos

EX : PAPILLON DE LORENZ

Exercice : Etudier le système suivant:

$\boxed{\text{on considère } x_1, x_2 \geq 0}$

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_1^2 x_2 := f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_2 - x_1^2 x_2 := f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$



$x_2 = f(x_1)$

$x_2 = g(x_1)$

① Déterminer les isoclines-0 (et donner leur nature et leur type)

② Calculer les equilibres, et tracer les champs de vecteurs

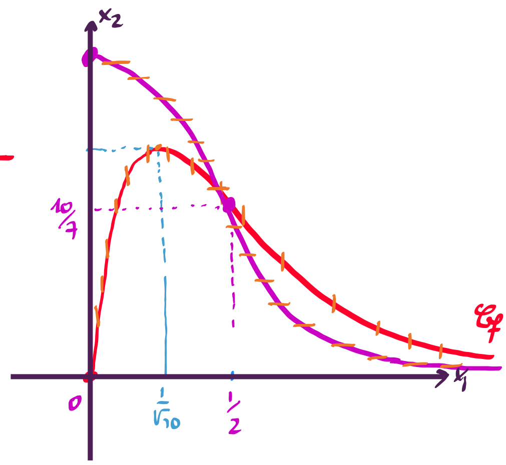
③ Montrer l'existence d'au moins un cycle limite

Solution : ① Les isoclines-0 verticales vérifient $x_1' = 0$ càd $f_1(x_1, x_2) = 0$

or $f_1(x_1,x_2)=0 \iff -x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_1^2 x_2 = 0$

$\iff x_2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right) = x_1$

$\iff \boxed{x_2 = \frac{x_1}{\frac{1}{10}+x_1^2}} = f(x_1)$



Les isoclines-0 horizontales: elles vérifient $\dot{x}_2=0$ càd $f_2(x_1,x_2)=0$

or $f_2(x_1,x_2)=0 \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_2 - x_1^2 x_2 = 0$

$\iff x_2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right) = \frac{1}{2}$

$\iff \boxed{x_2 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)} = g(x_1)}$

$u = x_1 \quad u' = 1$

$v = \frac{1}{10}+x_1^2 \quad v' = 2x_1$

$f_1(x_1) = \frac{x_1}{\frac{1}{10}+x_1^2}$

$f_1'(x_1) = \frac{\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right) - x_1 \cdot 2x_1}{\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)^2}$

$= \frac{\frac{1}{10}+x_1^2-2x_1^2}{\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{10}-x_1^2}{(\quad)^2}$

$f_1'(x_1) = 0 \iff x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$f_1\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 5 <$

② Les équilibres vérifient:

$f(x_1) = g(x_1)$

càd $\frac{x_1}{\frac{1}{10}+x_1^2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)}$ (*)

(*) $\iff 2x_1 = 1$

$\iff \boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ alors $x_2 = \frac{1/2}{1/10+1/4} = \boxed{\frac{10}{7}}$

Il n'y a qu'un seul équilibre : $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{10}{7}\right)$

Nature et type de l'équilibre:

JACOBIENNE $J_{(f_1,f_2)}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -1+2x_1x_2 & \frac{1}{10}+x_1^2 \\ -2x_1x_2 & -\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right) \end{pmatrix}$ et $J_{(f_1,f_2)}\left(\frac{1}{2},\frac{10}{7}\right) = \begin{pmatrix} 3/7 & 7/20 \\ -10/7 & -7/20 \end{pmatrix}$

$\det(J) = (3/7)(-7/20) + 7/20 \cdot \frac{10}{7}$

$\mathrm{tr}(J) = \frac{3}{7} - \frac{7}{20} = \frac{60-49}{140} = \frac{11}{140} > 0$

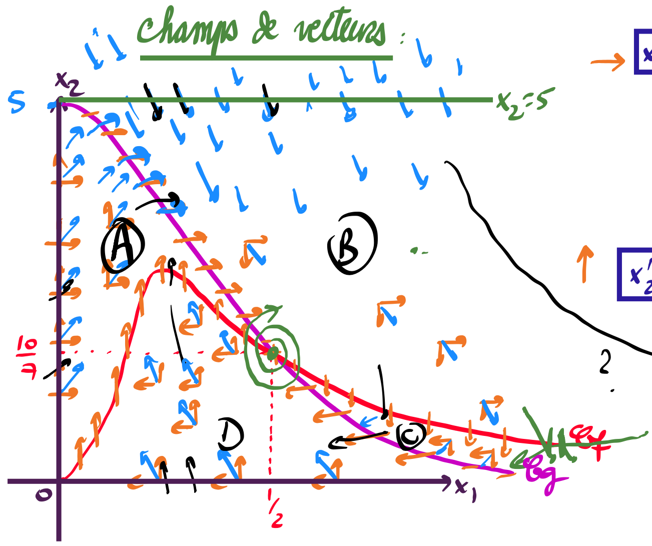
$\boxed{\text{INSTABLE}}$

$\det(J) = \frac{-3}{20} + \frac{1}{2} = \frac{-3+10}{20} = \frac{7}{20} > 0$

et $\Delta = \mathrm{tr}(J)^2 - 4\det(J)$

$= \left(\frac{11}{140}\right)^2 - 4\cdot\frac{7}{20} < 0 \rightarrow$ $\boxed{\text{FOYER INSTABLE}}$

Champs de vecteurs :



$\rightarrow \boxed{x_1'>0} \Leftrightarrow f_1(x_1,x_2)>0$

$\Leftrightarrow -x_1+\frac{1}{10}x_2+x_1^2x_2>0$

$\Leftrightarrow x_2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)>x_1$

$\Leftrightarrow x_2>\frac{x_1}{\frac{1}{10}+x_1^2}$

$\uparrow \boxed{x_2'>0} \Leftrightarrow f_2(x_1,x_2)>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{10}x_2-x_1^2x_2>0$

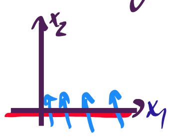
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > x_2\left(\frac{1}{10}+x_1^2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{10}+x_1^2} > x_2$

3. On a montré qu'il existe un seul équilibre pour ce système, et cet équilibre est instable. Pour montrer que les trajectoires convergent vers un cycle limite (attention, on ne montre pas l'unicité du cycle limite mais l'existence d'au moins un), il faut montrer que les trajectoires sont bornées et par le théorème de Poincaré-Bendixson on aura la conclusion !

L'objectif de ③ : montrer que toutes les trajectoires sont bornées. Pour ça, on va construire une "boîte" dans laquelle les trajectoires peuvent entrer mais ne peuvent plus en sortir !

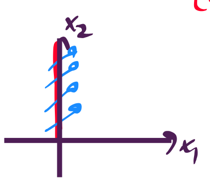
→ quand $x_2=0$



on pourrait le montrer par le calcul, mais par le champ de vecteurs on voit que les trajectoires "montent" (toujours avec x_1 et $x_2 \geq 0$)

on montrerait que $x_2'>0$ et $x_1'<0$

→ quand $x_1=0$

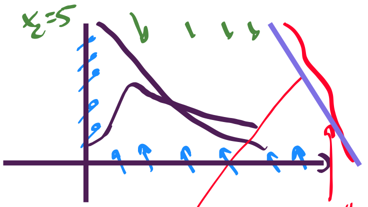


Par un même argument, les trajectoires en $x_1=0$ vont vers la droite

Cherchons les 2 autres côtés de la boîte : (voir schéma : champ de vecteurs)

$x_2=5$

toutes les trajectoires

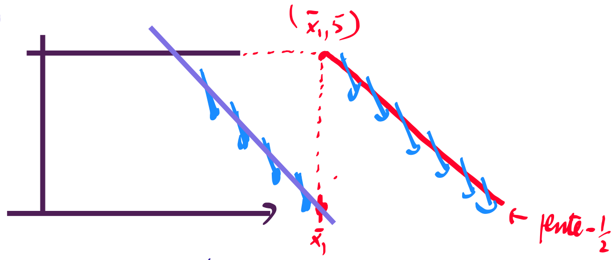


toutes les trajectoires ayant pour donnée initiale (x_1, x_2) avec $x_1, x_2 > 0$ et $x_2 > 5$ doivent avoir $x_2(t) \leq 5$ pour un certain t (voir champ de vecteurs)

reste à "fermer" la boîte pour piéger les solutions afin qu'elles soient bornées.

Comment:

on cherche une droite de pente négative t.q les vecteurs pointent vers le bas avec la "pente" des vecteurs supérieure à la pente de cette droite.



or, en chaque point (x_1, x_2) les vecteurs ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

càd $\begin{pmatrix} -x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_1^2 x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_2 - x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$ dont la pente est $\frac{\text{ORDONNÉE}}{\text{ABSCISSE}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_2 - x_1^2 x_2}{-x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_1^2 x_2} \xrightarrow[x_1 \to +\infty]{} -1$

x_2 fixé

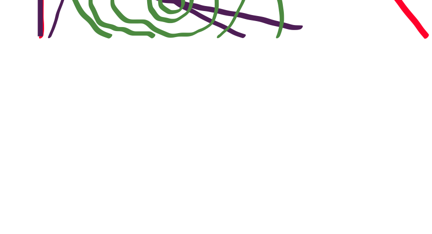
donc la pente maximale des flèches est de -1 (quand $x_1 \to +\infty$)

Donc il existe un $\bar{x}_1 > 0$ t.q. pour tout $x_1 > \bar{x}_1$ $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}x_2 - x_1^2 x_2}{-x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_1^2 x_2} < -\frac{1}{2}$

alors la droite passant par le point $(\bar{x}_1, 5)$ et de pente $-\frac{1}{2}$ est telle que les vecteurs sont sont nécessairement rentrant dès que les trajectoires traversent cette droite

On vient donc de déterminer une "boîte" dans laquelle toutes trajectoires se trouvent piégées à partir d'un certain temps t, et ne pourront pas en sortir (elles seront BORNÉES)

D'après le théorème de Poincaré Bendixson, il existe donc au moins un cycle limite vers lesquelles les trajectoires seront attirées



11 MARS 2026 - Critère de ROUTH - HURWITZ

(RUTH)

On considère le système linéaire $Y' = AY$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On écrit alors le polynôme caractéristique sous la forme

$x' = F(x)$

$\to x^*$ équilibre

$\downarrow$

$x = x^* + x_p$

$\downarrow$

$x_p' = F(x^* + x_p)$

linéarise

polynôme caractéristique sous la forme

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff 1\,\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

on a 1 $\quad 0, 0, 1, a_1, a_2, a_3, \dots \quad , a_m, 0, 0, 0, \dots$

s linéaire $x_p' = \boxed{J_{x^*}} x_p$

$\boxed{Y' = AY}$

On définit alors les déterminants de ROUTH-HURWITZ de la façon suivante :

$$H_1 = a_1 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \qquad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$\dots \quad H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1\ 1\ 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & \dots & & & a_j \end{vmatrix} \quad \dots \quad H_{m-1} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \dots & \vdots \\ a_5 & & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_m & a_{m-1} \end{vmatrix}$$

$1 \leq j \leq m$

$$\text{et} \quad H_m = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & & & \vdots \\ a_5 & & a_3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_m \end{vmatrix}$$

Proposition : Dans le cas d'une matrice de dimension n, les termes a_j des déterminants de ROUTH-HURWITZ sont définis par :

$$\begin{cases} a_{2j-k} & \text{si} \quad 0 < 2j-k < n \\ 1 & \text{si} \quad 2j = k \\ 0 & \text{si} \quad 2j < k \ \text{ou} \ 2j > n+k \end{cases}$$

Proposition Pour tout $\lambda \in Sp(A)$ $\quad Re(\lambda) < 0 \iff \forall i = 1, \dots, n \ \boxed{H_i > 0}$

càd $\quad x^*$ est L.A.S $\iff \forall i = 1, \dots, n \ H_i > 0$

Exemple :

① dans $\mathbb{R}^2$: $\quad X' = AX \quad$ et $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

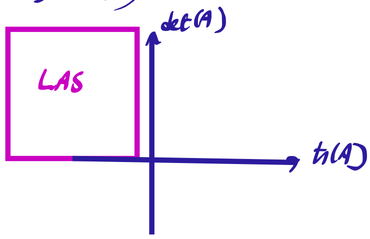
Le polynôme caractéristique s'écrit : $\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0}$ avec $a_1 = -\mathrm{tr}(A)$

et $a_2 = \det(A)$

Les déterminants de ROUTH-HURWITZ sont

Les déterminants de ROUTH-HURWITZ sont :

$H_1 = a_1 = -tr(A)$ et $H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = -tr(A).det(A)$



X^* est L.A.S $\Leftrightarrow$ $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$

$\Leftrightarrow -tr(A) > 0$ et $-tr(A).\underbrace{det(A)}_{>0} > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{tr(A) < 0}$ et $\boxed{det(A) > 0}$

② <u>Dans $\mathbb{R}^3$</u> : $det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0}$

$H_1 = a_1$ $\quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3$ $\quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 . H_2$

ainsi X^* est L.A.S $\Leftrightarrow$ $H_1 > 0$ et $H_2 > 0$ et $H_3 > 0$

$\Leftrightarrow a_1 > 0$ et $a_1 a_2 - a_3 > 0$ et $a_3 \underbrace{H_2}_{>0} > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 > 0 \text{ et } a_1 a_2 > a_3 \text{ et } a_3 > 0}$

③ <u>Dans $\mathbb{R}^4$</u> $det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0}$

$H_1 = a_1$

$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3$

$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2$

$H_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \cdot H_3$

Ainsi X^* est L.A.S $\Leftrightarrow$ $H_1, H_2, H_3, H_4 > 0$

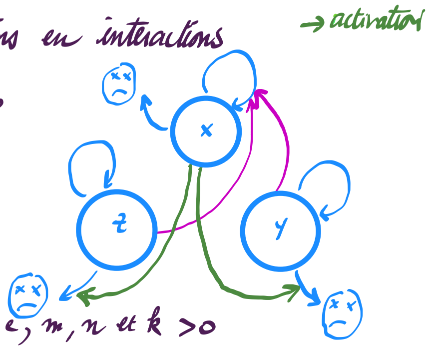
Ainsi X^* est L.A.S $\Leftrightarrow$ $H_1, H_2, H_3, H_4 > 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 > 0 \text{ et } a_1 a_2 > a_3 \text{ et } a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0 \text{ et } a_4 > 0}$$

Exercice : application à la dynamique de POPULATION (problème d'écologie)

On considère une communauté réduite de 3 populations en interactions

x, y, z définies par le système : avec $x, y, z \geq 0$



$$\begin{cases} x' = a.\underbrace{x.z}_{\text{croissance liée à } z} + b.\underbrace{x y}_{\text{croissance liée à } y} - \underbrace{cx}_{\text{mortalité naturelle}} & \rightarrow x : \text{prédateurs} \\ y' = \underbrace{d y}_{\text{croissance exponentielle}} - \underbrace{e x.y}_{\text{mortalité due à } x} & \rightarrow y : \text{proie} \\ z' = \underbrace{m\, z.(n-z)}_{\text{croissance logistique}} - \underbrace{k x z}_{\text{mortalité due à } x} & \rightarrow z : \text{proie} \end{cases}$$

où a, b, c, d, e, m, n et $k > 0$

① Interpréter biologiquement ce problème

② Déterminer le ou les équilibres > 0 ($x^* > 0$, $y^* > 0$ et $z^* > 0$)

(équilibre de co-existence des 3 espèces)

③ Déterminer la matrice jacobienne de ce système en ce (ou ces) équilibre(s)

④ Déterminer un ou plusieurs critères pour que ce (ou ces) équilibre(s) soient L.A.S.

① voir équations & schéma ci-dessus

② Cherchons $(x^*; y^*; z^*)$ les équilibres strictement positifs du système.

càd (x^*, y^*, z^*) tel que $x^{*'}=0$, $y^{*'}=0$ et $z^{*'}=0$.

Ceci revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} axz + bxy - cx = 0 \\ dy - exy = 0 \\ mz(n-z) - kxz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(az+by-c)=0 \\ y(d-ex) = 0 \\ z(m(n-z)-kx=0 \end{cases} \overset{\text{comme } x,y,z\neq 0}{\iff} \begin{cases} az+by-c=0 \; ① \\ d-ex=0 \; ② \\ m(n-z)-kx=0 \; ③ \end{cases}$$

avec $x,y,z>0$

donc $\boxed{x^* = \frac{d}{e}}$ d'après ②

de plus, $m(n-z^*) = kx^*$ d'après ③

càd $n - z^* = \frac{kx^*}{m}$ donc $\boxed{z^* = n - \frac{kx^*}{m}}$ n'existe que si $z^*>0$ càd $n - \frac{kx^*}{m} > 0$

ou encore $\boxed{n > \frac{kx^*}{m}}$ condition ⓐ

enfin d'après ①, $by^* = c - az^*$

càd $\boxed{y^* = \frac{c-az^*}{b}}$, n'existe que si $y^*>0$ càd $c-az^*>0$

ou encore $\boxed{c > az^*}$ condition ⓑ

Conclusion : on a un seul équilibre "de coexistence" des trois espèces qui est :

équilibre "de coexistence" des trois espèces

$\left(\frac{d}{e}, \frac{c-az^*}{b}, n - \frac{kx^*}{m}\right)$ sous 2 conditions : (a) $n > \frac{kx^*}{m}$ et (b) $c > az^*$

3. La Jacobienne de ce système en (x,y,z) vaut :

$$J = \begin{pmatrix} az+by-c & bx & ax \\ -ey & d-ex & 0 \\ -kz & 0 & mn-2mz-kx \end{pmatrix}$$

$$mn-2mz-kx = \underbrace{mn-mz-kx}_{0}-mz$$

$by^*-c+az^*=0$

$x^*=\frac{d}{e}$, $y^*=\frac{c-az^*}{b}$, $z^*=n-\frac{kx^*}{m}$

$ex^*-d=0$

$$J^* = \begin{pmatrix} \underbrace{az^*+by^*-c}_{=0} & bx^* & ax^* \\ -ey^* & 0 & 0 \\ -kz^* & 0 & -mz^* \end{pmatrix}$$

et en (x^*,y^*,z^*) elle vaut

$$J^* = \begin{pmatrix} 0 & bx^* & ax^* \\ -cy^* & 0 & 0 \\ -kz^* & 0 & -mz^* \end{pmatrix}$$

$$mz^* - mn + kx^* = 0$$

$$\Leftrightarrow mn - mz^* - kx^* = 0$$

4. Pour déterminer si $(x^*; y^*; y^*)$ utilisons le critère de Routh-Hurwitz

Cherchons le polynôme caractéristique :

$$\det(J^* - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & bx^* & ax^* \\ -ey^* & -\lambda & 0 \\ -kz^* & 0 & -mz^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -mz^* - \lambda \end{vmatrix} + ey^* \begin{vmatrix} bx^* & ax^* \\ 0 & -mz^* - \lambda \end{vmatrix} - kz^* \begin{vmatrix} bx^* & ax^* \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2(mz^* + \lambda) - ebx^*y^* \cdot (mz^* + \lambda) - akx^*z^*\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - mz^*\lambda^2 - (ebx^*y^* + akx^*z^*)\lambda - ebmx^*y^*z^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + mz^*\lambda^2 + (\quad " \quad)\lambda + ebmx^*y^*z^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

où $a_1 = mz^*$

$a_2 = ebx^*y^* + akx^*z^*$

et $a_3 = ebmx^*y^*z^*$

On a $(x^*; y^*; z^*)$ est L.A.S <u>ssi</u> (critère de Routh-Hurwitz) $a_1 > 0, a_3 > 0$ et $a_1 a_2 > a_3$

or $a, b, e, k, m > 0$ et $x^*, y^*, z^* > 0$

donc $a_1 > 0$ ✓

$a_3 > 0$ ✓

a-t-on $a_1 a_2 > a_3$? $\quad a_1 a_2 > a_3$

$$\Leftrightarrow \cancel{mz^*}(ebx^*y^* + akx^*z^*) > eb\cancel{m}x^*y^*\cancel{z^*}$$

$$\Leftrightarrow eb\cancel{x^*y^*} + akx^*z^* > eb\cancel{x^*y^*}$$

$$\Leftrightarrow akx^*z^* > 0 \quad \text{vrai} \quad ✓$$

Par conséquent, dès que l'équilibre $(x^*; y^*; z^*)$ de "coexistence des 3 espèces"

Par conséquent, dès que l'équilibre $(x^*; y^*; z^*)$ de "coexistence des 3 espèces"

càd $x^*, y^*, z^* > 0$ existe, il est nécessairement L.A.S sans autre condition supplémentaire

que ses conditions d'existence : condition 1 et condition 2

$c > az^*$ $\qquad$ $r > \frac{kx^*}{m}$