Laurent PUJO-MENJOUET

DOUA - BÂT. BRACONNIER BUREAU 246
pujo@math.univ-lyon1.fr

. COURS : Introduction sur les suites

Définition : On appelle suite, toute application $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}}$

(où $\mathbb{N}$: nombres entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, ...)
(où $\mathbb{R}$: nombres réels)

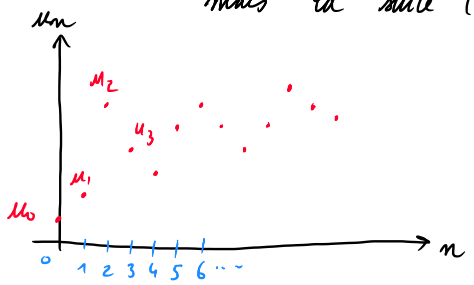
le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

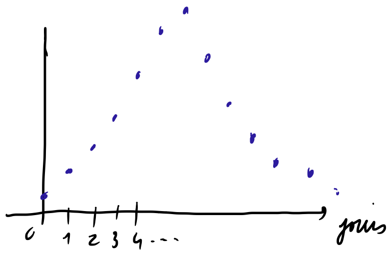
Attention notation : ne pas confondre u_n : qui est un nombre
et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est la suite (un ensemble de nombres)

Donc il ne faudra pas écrire : la suite ~~u_n~~ est croissante...

mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Représentation :





Il existe 2 façons de décrire les suites :

1. formulation explicite : $\boxed{u_n = f(n)}$, $n\in\mathbb{N}$
2. formulation par récurrence $\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \quad , a\in\mathbb{R} \end{cases}}$

Avantage de la formulation explicite : si on veut $u_{500} = f(500)$ $\rightarrow$ on a le résultat immédiatement formulation explicite : si on veut $u_{500} = f(500)$ → on a le résultat immédiatement

alors que avec la formulation par récurrence :

si on veut $u_{500} = f(u_{499})$

mais $u_{499} = f(u_{498})$

et $u_{498} = f(u_{497})$ ..... → très long à calculer

Exemples : ① on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ($f(x) = \sqrt{x}$) et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\boxed{u_n = f(n) = \sqrt{n}}$

$n \in \mathbb{N}$

donc $\sqrt{n}$ existe toujours

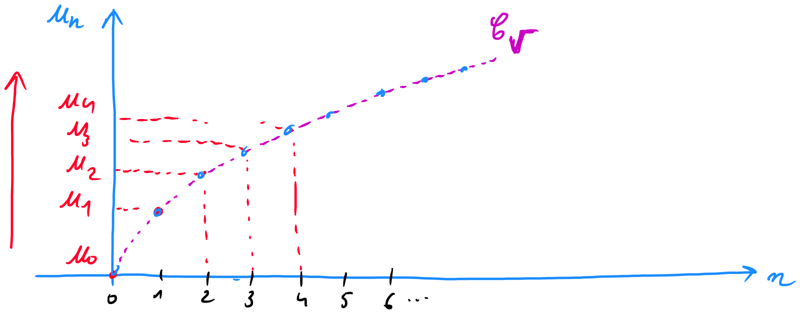
$u_0 = \sqrt{0} = 0$

$u_1 = \sqrt{1} = 1$

$u_2 = \sqrt{2}$

$u_3 = \sqrt{3}$

$u_4 = \sqrt{4} = 2$ ...



représentation de la formulation explicite de $\boxed{u_n = \sqrt{n}}$

② on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(u_n \quad u_n) \quad u_n^2)$

② on considère $\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}}$ $\boxed{f(x) = x^2}$

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 \\ u_0 = a, \ a \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

on a alors $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

si $a = 2$

$u_0 = 2$

$u_1 = u_0^2 = 2^2 = 4$

$u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$

$u_3 = u_2^2 = 16^2 \ldots$

Question : comment représenter une suite définie par récurrence ?

$u_{n+1} = u_n^2$

MÉTHODE :

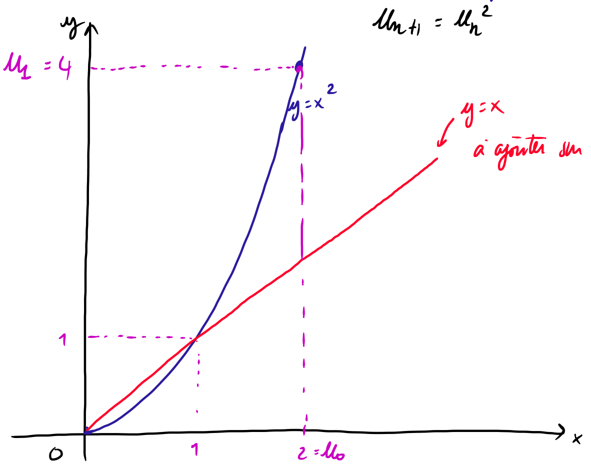
$u_0 = 2$

$u_1 = f(u_0)$

$u_2 = f(u_1)$

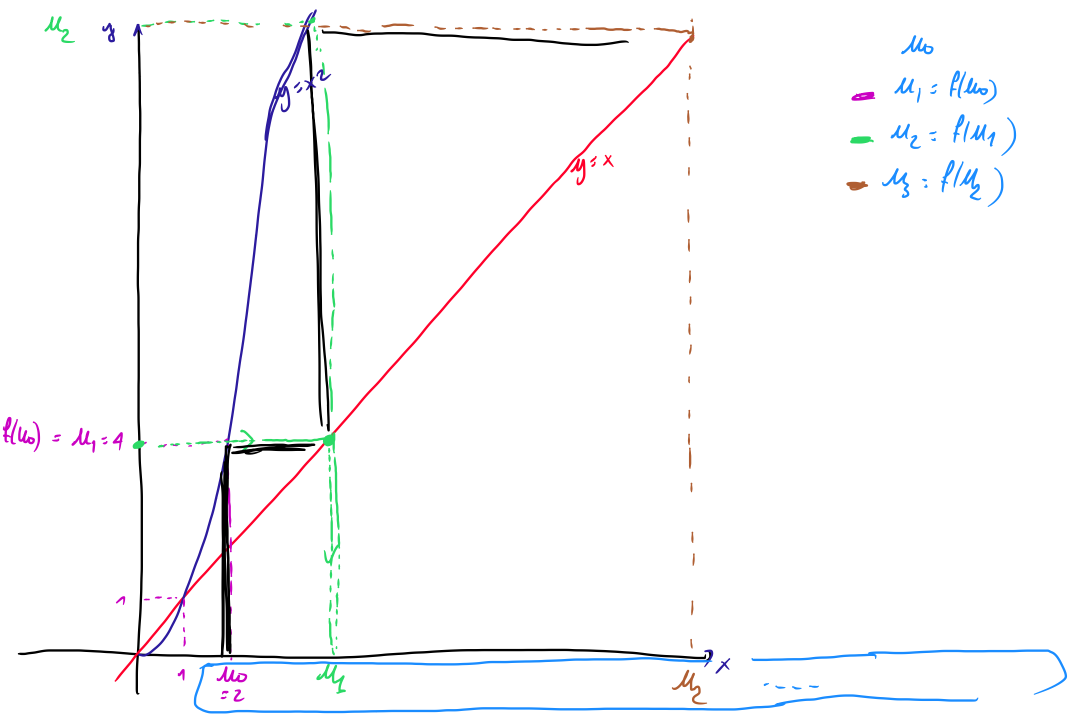
$u_3 = f(u_2)$

$\vdots$



$y = x$ à ajouter sur le graphe

en mathématiques cette droite s'appelle la première bissectrice



u_0

$u_1 = f(u_0)$

$u_2 = f(u_1)$

$u_3 = f(u_2)$

2 suites classiques :

a. Suite arithmétique :

Définition : on appelle suite arithmétique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre réel a appelé RAISON de cette suite telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$ (le suivant est calculé par le précédent + une constante a)

exemple : $u_0 = 2$ et $a = 3$ alors $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

$u_1 = u_0 + 3 = 5 = u_0 + 1\times 3$

$u_2 = u_1 + 3 = 8 = (u_0 + 3) + 3 = u_0 + 2\times 3$

$u_3 = u_2 + 3 = 11 = (u_0 + 2\times 3) + 3 = u_0 + 2\times 3 + 3 = u_0 + 3\times 3$ ....

$\vdots$

$u_n = u_0 + n\times 3$

Remarque : ce résultat est général

quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ formulation par récurrence}$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la formulation explicite $\boxed{u_n = u_0 + na}$

Remarque : que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$?

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + (u_0 + a) + (u_0 + 2a) + (u_0 + 3a) + \dots + (u_0 + na)$$

$$= \underbrace{u_0 + u_0 + u_0 + \dots + u_0}_{n+1 \text{ termes}} + a + 2a + 3a + 4a + \dots + na$$

$$= \boxed{(n+1)\,u_0 + a\,(1+2+3+4+\dots+n)}$$

Rappel : que vaut $1+2+3+4+\dots+n$?

GAUSS :

$$\begin{aligned} & S = 1+2+3+4+\dots+100 \\ + \; & S = 100+99+98+97+\dots+1 \\ \hline & 2S = \underbrace{101+101+101+101+\dots+101}_{100 \text{ termes}} = 100 \times 101 \end{aligned}$$

donc $2S = 100 \times 101$

donc $\boxed{S = \dfrac{100 \times 101}{2}}$

$$\begin{aligned} & S = 1+2+3+4+\dots+n \\ + \; & S = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1 \\ \hline & 2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)\dots+(n+1)}_{n \text{ termes}} = n \times (n+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2S = n \times (n+1)$

donc $\boxed{S = \dfrac{n \times (n+1)}{2}}$

donc $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n} = (n+1)\, u_0 + a \cdot \dfrac{n \times (n+1)}{2}$

$= (n+1)\left(u_0 + \dfrac{a \times n}{2}\right) = (n+1)\left(\dfrac{2u_0 + a \times n}{2}\right)$

par définition c'est u_n !!

$= (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_0 + a \times n}{2}\right) = \boxed{(n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)}$

6. <u>suites géométriques</u>,

<u>Définition</u> : on appelle suite géometrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r \times u_n \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :

$u_0 = 2 \qquad r = 3$

$u_1 = 3.u_0 = 3 \times 2 = 6$

$u_2 = 3.u_1 = 3.3u_0 = 3^2 u_0$

$u_3 = 3\, u_2 = 3.\,3^2 u_0 = 3^3 u_0$

$\vdots$

$$\boxed{u_n = 3^n u_0}$$

<u>Remarque</u> : ce resultat peut se generaliser :

toute suite geometrique $\begin{cases} u_{n+1} = r.u_n \quad , n\in\mathbb{N} \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$

peut s'ecrire sous la forme explicite $\boxed{u_n = r^n u_0}$ ←

<u>Question</u> : que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$?

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + r^1 . u_0 + r^2 u_0 + r^3 u_0 + \dots + r^n u_0$$
$$= u_0 (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n)$$

<u>Rappel</u> : que vaut $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n$?

<u>ASTUCE</u> : $\boxed{\text{si } r = 1}$ $1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + \dots + 1^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = \boxed{n+1}$

si $\underline{\underline{r = 1}}$ $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times (n+1)$

$\boxed{\text{si } r \neq 1}$ on multiplie $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$ par $\boxed{1 - r}$
ASTUCE

$$(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$
$$- r - r^2 - r^3 - \dots - r^n - r^{n+1}$$
$$= 1 - r^{n+1}$$

donc $\boxed{1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$ (on peut diviser par $1 - r$ car $r \neq 1$)

<u>Finalement</u> : si $r \neq 1$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \boxed{u_0 . \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

somme des $n+1$ éléments consécutifs d'une suite géométrique

c. Suites arithmético-géométriques

c. Suites arithmético-géométriques :

Définition : on appelle suite arithmético géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe 2 réels a et r (appelés raisons de cette suite) t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = a + r \times u_n \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Remarques : si $\boxed{r=1}$ on a $u_{n+1} = a + u_n$: on retombe sur la suite arithmétique

$\boxed{\text{si } a=0}$ on a $u_{n+1} = r u_n$: " " " géométrique

Question : peut-on trouver une formulation explicite de ce type de suite ?

Réponse : oui

13 JANVIER 2022
COURS 2/3

MÉTHODE : on suppose $\boxed{r \neq 1}$

ASTUCE :

étape 1 : on cherche la constante réelle ℓ telle que $\boxed{a + r \times \ell = \ell}$

Remarque : si on pose $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ avec $f(u_n) = a + r \times u_n$

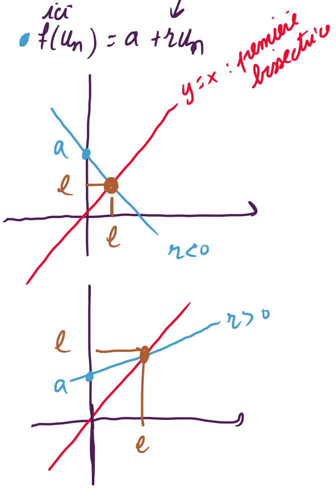
alors ℓ vérifie $\boxed{\ell = f(\ell)}$

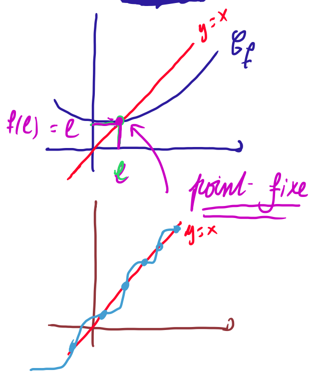
$y = 1 . x$

$y = a + r x$

ici

• $f(u_n) = a + r u_n$





<u>Remarque</u>: comme $r \neq 1$, $f : x \mapsto a + rx$ aura toujours un point fixe (et un seul)

(c'est l'intersection avec la première bissectrice : $y = x$)

Cherchons ce point fixe : cherchons ℓ tel que $\ell = f(\ell)$

$$\ell = a + r.\ell \iff \ell - r\ell = a$$
$$\iff \ell(1-r) = a$$
$$\iff \boxed{\ell = \frac{a}{1-r}} \quad r \neq 1$$

$$(*) \begin{cases} \boxed{u_{n+1} = a + r u_n} \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

ASTUCE 2

<u>étape 2</u> : on pose $\begin{cases} \boxed{v_n = u_n - \ell} \\ v_0 = u_0 - \ell \end{cases}$ nouvelle suite $(n \in \mathbb{N})$

Que vaut v_{n+1} ?

$\boxed{v_n = u_n - \ell}$

donc $\boxed{u_n = v_n + \ell}$

et en $\boxed{n+1}$ $\boxed{u_{n+1} = a + r u_n} = \boxed{a + r(v_n + \ell)}$

$(*)$

$u_{n+1} = \boxed{v_{n+1} + \ell} = a + r(v_n + \ell)$

$\Rightarrow v_{n+1} = a + r v_n + r\ell - \ell$

$= a + r v_n + (r-1)\ell$ OR $\ell = \frac{a}{1-r}$

$= a + r v_n + (r-1)\frac{a}{1-r}$

$\frac{r-1}{1-r} = \frac{-(1-r)}{1-r} = -1$

$= \cancel{a} + r v_n - \cancel{a}$

$\boxed{v_{n+1} = r v_n}$ → SUITE GÉOMÉTRIQUE d'après le cours $\boxed{v_n = r^n v_0}$

or $u_n = v_n + \ell = r^n v_0 + \ell = r^n(u_0 - \ell) + \ell$ avec $\ell = \frac{a}{1-r}$

la formule complète : $\boxed{u_n = r^n\left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) + \frac{a}{1-r}}$

Rappel : $\begin{cases} \boxed{u_{n+1} = a + r u_n} & \text{si } r \neq 1 \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

- étape 1 : trouver ℓ t.q. $\ell = f(\ell)$ (on trouve $\ell = \frac{a}{1-r}$)
- étape 2 : poser $v_n = u_n - \ell$

étape 3 : trouver $v_{n+1} = r v_n$ donc $v_n = r^n v_0$

étape 4 : $\boxed{u_n} = v_n + \ell = \boxed{r^n v_0 + \ell}$

exercice : trouver la formulation explicite de la suite : $\begin{cases} u_{n+1} = 3 + 2u_n = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

solution : étape 1 : on cherche $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $\ell = 3 + 2\ell$ $\quad (\ell = f(\ell))$

$\Leftrightarrow \ell - 2\ell = 3$

$\Leftrightarrow -\ell = 3$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell = -3}$

étape 2 : on pose $v_n = u_n - \ell = u_n - (-3) = u_n + 3$ $\qquad v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$

$\boxed{u_n = v_n + \ell = v_n - 3}$

$u_{n+1} = 3 + 2u_n$

$\Leftrightarrow v_{n+1} - 3 = 3 + 2(v_n - 3)$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \cancel{3} + \cancel{3} + 2v_n - 3 \times 2 = 2v_n$

Par conséquent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme 4.

étape 3 : donc $v_n = v_0\, 2^n$ càd $v_n = 4 \times 2^n$

$= 2^2 \times 2^n = 2^{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$

étape 4 Par conséquent $u_n = v_n - 3$

$\boxed{u_n = 2^{n+2} - 3}$, $n \in \mathbb{N}$ formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{u_{10} = 2^{12} - 3}$

3. Suite récurrente : généralité :

Comment étudier une suite récurrente de façon générale (on cherche vers quoi tend $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ???$

Dans cette section, nous étudions les suites récurrentes sous la forme générale

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \quad n\in\mathbb{N} \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle contenu dans le domaine de définition de f).

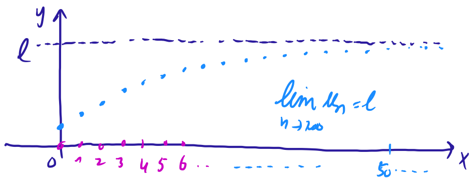
: $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, $I =]0,+\infty[$

Proposition : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et si hypo !
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ
(càd $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$) alors ℓ vérifie $\boxed{\ell = f(\ell)}$

ℓ est un point fixe de f.

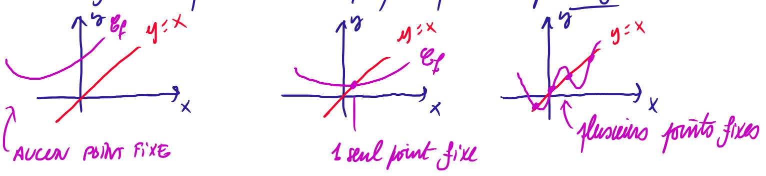
en effet : on a $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$



Remarque : bonne nouvelle, toutes les fonctions classiques $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $\mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$, ... sont continues sur leur ensemble de définition.
La somme, le produit ou le quotient de fonctions continues est une fonction continue.

Attention : une fonction peut avoir 0, 1, ou plusieurs points fixes.



$u_{n+1} = f(u_n)$ $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

• $f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$ $D_f = ?$ $\mathbb{R} - \{5\}$

$x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

• f continue ?

$x \mapsto x+2$ continue sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x-5$ " sur $\mathbb{R} - \{5\}$

$x \mapsto 1$

le quotient et la somme de fonctions continues est continue sur $\mathbb{R} - \{5\}$

donc f est continue.

Remarque : plusieurs questions vont se poser :

① combien de points fixes la fonction f possède-t-elle ?

② si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers quel point fixe converge-t-elle ?

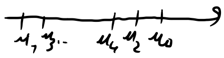
③ Comment savoir si la suite converge ?

④ Comment savoir si la suite est croissante, décroissante, alternée ...??

Réponse à la question 4 : on considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\boxed{\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)\\ u_0 \text{ donné}\end{cases}}$

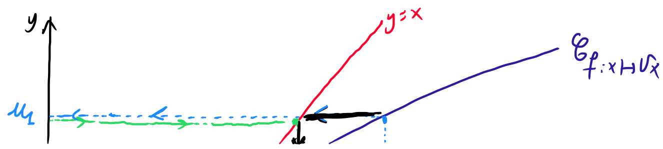
- si f est croissante : alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit croissante, soit décroissante
  (pour le savoir calculer u_1 : si $u_1 > u_0$: (u_n) est ↗
  si $u_1 < u_0$ (u_n) est ↘)

- si f est décroissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée



exemple : $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_n} & n\in\mathbb{N}\\ u_0 \text{ donné} >0 \end{cases}$

$u_0=2$



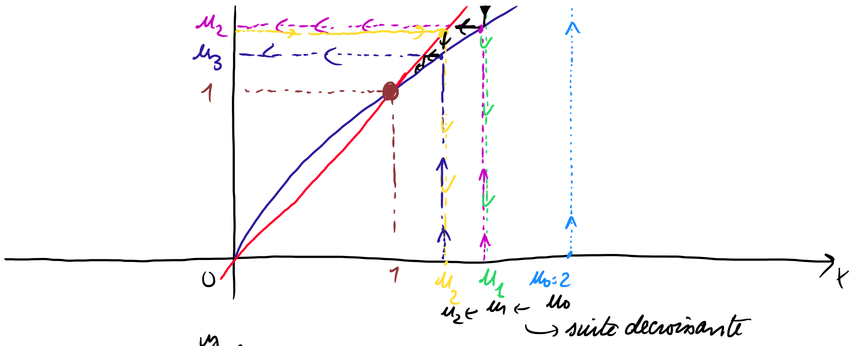
$u_0 = 2$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} = f(u_n)$

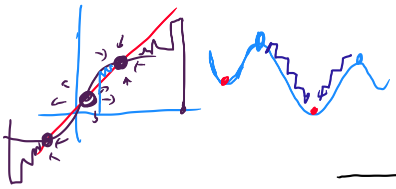
$u_1 = f(u_0)$

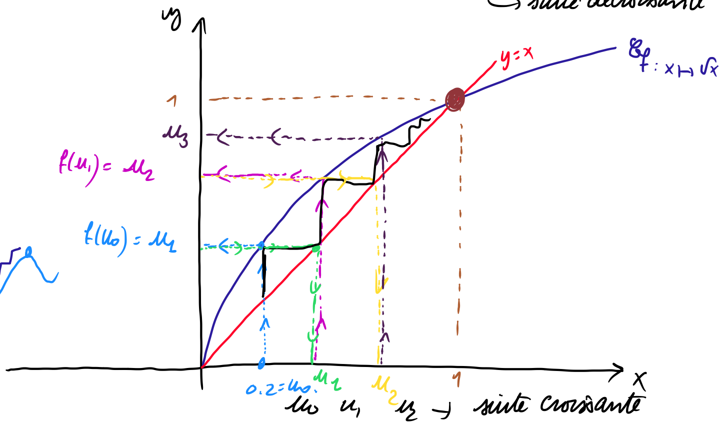
$u_2 = f(u_1)$

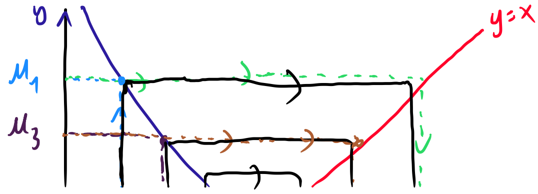
$u_3 = f(u_2)$

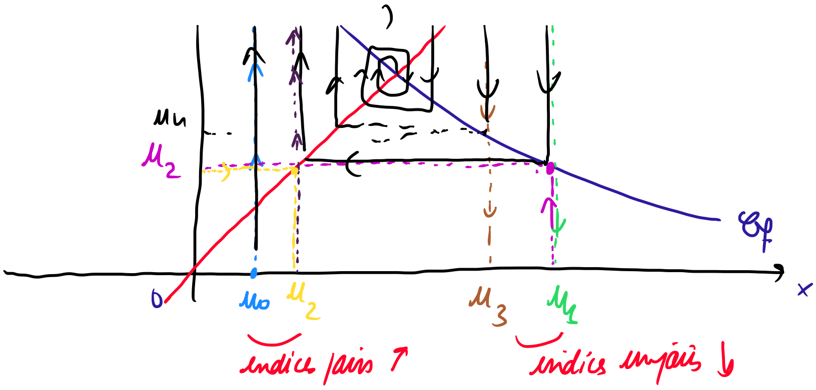


$u_0 = 0.2$

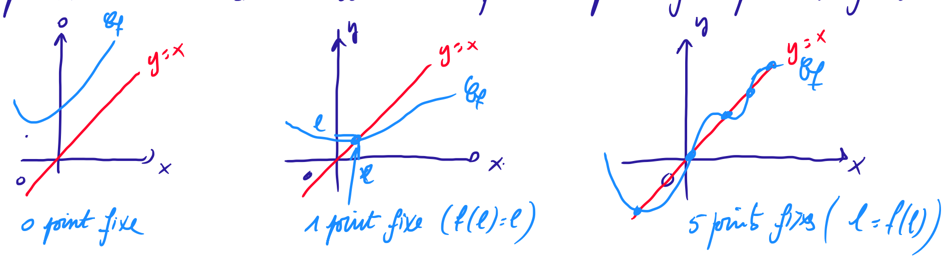






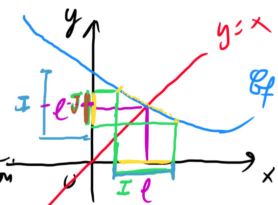


① Est-il possible de savoir si l'on a un ou plusieurs points fixes pour une fonction ?

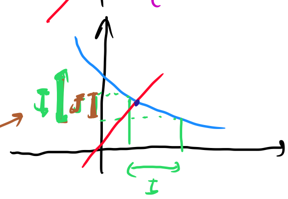


a. Stabilité d'un intervalle de définition

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset D_f$
domaine de définition de f



Définition : on dit que l'intervalle I est STABLE par la fonction f si $\underbrace{f(I)}_{J} \subset I$



Théorème : Lorsque I est un intervalle stable par f (càd $f(I) \subset I$)

alors la suite définie par :

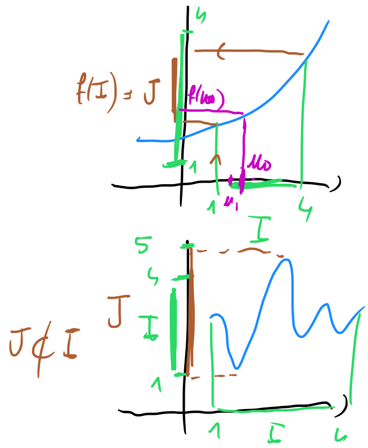
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

est DÉFINIE pour tout $n \in \mathbb{N}$

(en effet si $u_n \in I \subset D_f$

$u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I \subset D_f$

avec $u_0 \in D_f$)



Remarque : c'est un moyen efficace de montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur I sans passer par la récurrence)

6. POINT FIXE

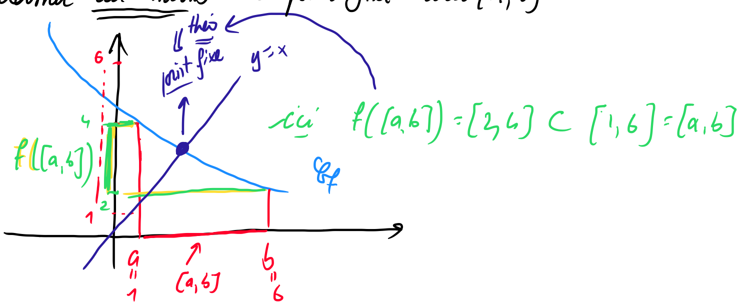
Définition : soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I (toutes les fonctions "classiques" sont continues sur leur domaine de définition)

on dit que ℓ est un point fixe de f quand $f(\ell)=\ell$

Théorème : Soient $I=[a,b]$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose en plus que $f([a,b]) \subset [a,b]$ (c.à.d que $[a,b]$ est stable par f)

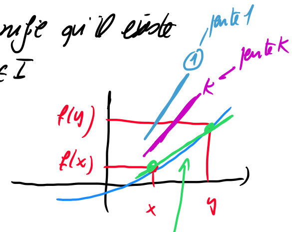
Alors f admet au moins un point fixe dans $[a,b]$.



c. Une condition nécessaire de convergence

(i) Fonction strictement contractante :

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$
dire que f est strictement contractante sur I signifie qu'il existe un réel k avec $\boxed{0 < k < 1}$ tel que pour tous $x, y \in I$



$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

$$\Leftrightarrow \left| \underbrace{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}_{\text{pente de la droite qui passe par } (x, f(x)),\ (y, f(y))} \right| \leq k$$

$\boxed{|X| \leq k \Leftrightarrow -k \leq X \leq k}$

c-à-d $-1 < -k \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq k < 1$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

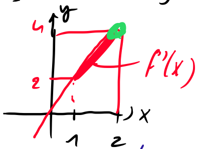
Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, f dérivable sur I
si f' (dérivée de f) vérifie : $\max_{x \in I} |f'(x)| = k < 1$ alors f est strictement contractante

Ex $\quad f(x) = x^2 \qquad I = [1, 2]$

Ex : $f(x) = x^2$, $I = [1,2]$.

$f'(x) = 2x$ ici $x \in I = [1,2]$ donc $x > 0$

donc $|f'(x)| = |2x| = 2x$



$\max\limits_{x \in [1,2]} |f'(x)| = 4$

or $4 > 1$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[1,2]$.

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Rappel : $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & \text{si } f'(x) \geq 0 \\ -f'(x) & \text{si } f'(x) < 0. \end{cases}$ ex : $|5| = 5$, $|-5| = 5$

Théorème : THÉORÈME DU POINT FIXE

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ telle que

① f est continue sur I

② I est stable par f (càd $f(I) \subset I$)

③ f est strictement contractante sur I $\left(\max\limits_{x \in I} |f'(I)| < 1\right)$

Alors f admet un unique point fixe ℓ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par unique point fixe ℓ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ converge vers ℓ.

<u>Question</u> : que se passe-t-il si on n'arrive pas à montrer ce théorème mais qu'on arrive par le calcul à montrer que f admet plusieurs points fixes ?

Dans ce cas là, comment savoir si un point fixe est attractif ou répulsif ?

<u>Théorème</u> : <u>point fixe attractif ou répulsif.</u>

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

on suppose f continue et dérivable sur I

Si on arrive à calculer les points fixes ℓ de f (on trouve leurs valeurs)

<u>alors</u> ① si $|f'(\ell)| < 1$: on dit que ℓ est ATTRACTIF et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si u_0 est dans un voisinage de ℓ

② si $|f'(\ell)| > 1$: " " " <u>RÉPULSIF</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges si u_0 est dans un voisinage de ℓ

③ si $f'(\ell) = 1$ on doit calculer alors $f''(\ell)$

(a) si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est RÉPULSIF

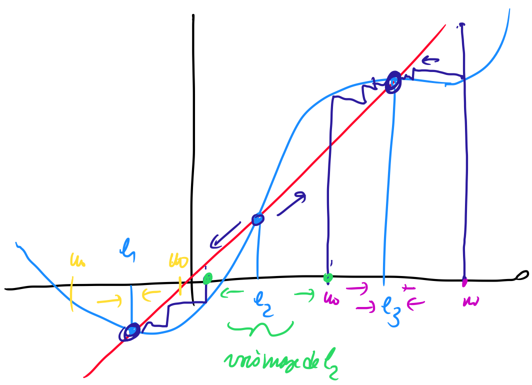
(b) si $f''(\ell) = 0$ alors (i) si $f'''(\ell) > 0$ alors ℓ est répulsif

(ii) si $f'''(\ell) < 0$ alors ℓ est attractif

(4) si $f'(\ell) = -1$ on calcule :

$-2f'''(\ell) - 3\left(f''(\ell)\right)^2$. si <0 alors ℓ est attractif

. si >0 " ℓ est répulsif



Ex : $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 + 6x$

$f''(x) = 12x^2 + 6$

$f'''(x) = 24x$

$\vdots$ $f^{(4)}(x) = 24$

$f^{(5)}(x) = 0$

FIN DU COURS.

EXAMEN L1 SPS 14 DEC. 2021

Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$

1. D_f ?

$D_f = \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } x-5 \neq 0\}$ or $x-5=0 \iff \boxed{x=5}$

$= \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } x \neq 5\}$.

$= \boxed{\mathbb{R} \setminus \{5\}}$, x est réel et $x \neq 5$

2. Expliquer pourquoi f est continue sur D_f ?

$f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$

or $x \mapsto x+2$ est continue, $x \mapsto x-5$ " " $\Big\}$ $x \mapsto \frac{x+2}{x-5}$ est continue sur D_f comme quotient de fonctions continues

$x \mapsto 1$ est continue

$\to$ f est continue comme somme de fonctions continues.

3. On considère $x \in [0,1]$ $(uv)'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'$

a. Montrer que $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$

$\underline{\underline{x \in [0,1] \subset D_f}}$

$f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$ $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-5) - (x+2) \cdot 1}{(x-5)^2} + 0 = \frac{x-5-x-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' \rightsquigarrow \frac{u'v-uv'}{v^2}$

b. Explique pourquoi f est décroissante sur $[0,1]$

si $f'(x) > 0$; alors $f \nearrow$

si $f'(x) < 0$ alors $f \searrow$

$f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ $-7 \to < 0$, $(x-5)^2 \to > 0$ $\} < 0$ donc f est $\searrow$ sur D_f donc sur $[0,1]$.

c. Calculer $f(0)$ et $f(1)$ En déduire que $[0,1]$ est stable par f

$f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$

$f(0) = \frac{0+2}{0-5} + 1 = -\frac{2}{5} + 1 = \frac{-2+5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{-3+4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

x	0		1
signe de $f'(x)$		$-$	
variations de f	$\frac{3}{5}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

donc $\boxed{f([0,1])} = [\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{>0} ; \underbrace{\tfrac{3}{5}}_{<1}] \boxed{\subset [0,1]}$

donc $[0,1]$ est stable par f

d. Montrer que $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3}$

$f^2 \to \underline{\underline{2.f.f'}}$

Rappel : $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ / $\frac{u}{v}$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad v = (x-5)^2$

$(u^2)' = 2.u.u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\vdots$

donc $f''(x) = \frac{-(-7)\times 2.(x-5).1}{(x-5)^4} = \frac{14(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14}{(x-5)^3}$

Montrer que f' est decroissante sur $[0,1]$

e. Montrer que f' est décroissante sur $[0,1]$

f' est décroissante si $f''(x)<0$

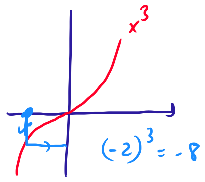
$$f''(x) = \frac{14 \;\rightarrow\; >0}{(x-5)^3}$$

$$\boxed{0<x<1}$$

$\Leftrightarrow 0-5 < x-5 < 1-5$

$\Leftrightarrow -5 < x-5 < -4 < 0$

donc $(x-5)^3 < 0$



donc $f''(x) < 0$ sur $[0,1]$

donc $f'(x)$ est décroissante sur $[0,1]$

x	0		1
signe de $f''(x)$		$-$	
variation de f'	$-\frac{7}{25}$	$\searrow$	$-\frac{7}{16}$

f. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$:

$$f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-7}{(0-5)^2} = \frac{-7}{5^2} = -\frac{7}{25}$$

$$f'(1) = \frac{-7}{(1-5)^2} = -\frac{7}{4^2} = -\frac{7}{16}$$

Montrer que f est strictement contractante :

comme $f'(x) < 0$ $f'(x)$ va de $-\frac{7}{25}$ vers $-\frac{7}{16}$

donc $\max\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 7/16 < 1$

on a f continue, et strictement contractante