Université Claude Bernard Lyon 1 Master 1 - Math. Appli. et Stat.
Semestre de printemps 2020-2021 UE : Syst. Dyn. Printemps 2021

Partiel (2h00) en présentiel
Mercredi 24 février 2021

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Questions de cours. *10 minutes - 4 points*

1. (2 points) Énoncer sans le démontrer, le théorème des bouts.
2. (2 points) Énoncer et démontrer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation différentielle.

Exercice 1. *40 minutes - 7 points* Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_1)\ \ t^2 + x^2(t) - 5 = (x(t) + tx(t))x'(t).$$

1. (1 point) Expliquer pourquoi l'équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que l'équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (2 points) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation $(\mathscr{E}_1)$.
4. (2 points) Déterminer une fonction $F : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, toute fonction $x \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, on ait

$$x \text{ solution de } (\mathscr{E}_1) \text{ sur } I \iff \text{ il existe } K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in I,\ F(t,x(t)) = K.$$

5. (1 point) Sans la calculer explicitement, déterminer s'il existe une solution x à $(\mathscr{E}_1)$ vérifiant de plus $x(0) = 1$.

Exercice 2. *20 minutes - 4 points*
Donner l'ensemble des solutions maximales et globales dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_2) \;\; |t|x'(t) + x(t) = t^2.$$

Indication : il faudra d'abord considérer le cas $t < 0$ puis le cas $t > 0$.

Exercice 3. *20 minutes - 3 points*
(4 points) On considère le système d'équations différentielles suivant

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrr} x_1' & = & 3x_1 & -18x_2, \\ x_2' & = & 2x_1 & -9x_2. \end{array} \right.$$

1. (1 point) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. (1 point) En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques.
3. (1 point) Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans les repères avant changement de base par les matrices de passage.

Exercice 4. *30 minutes - 6 points*
On considère l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_3) \quad x'(t) = rx(t) - \frac{x(t)}{1 + x^2(t)},$$

pour tout $t \in I \subset \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$ est une constante.

1. (1 point) Définir l'intervalle I où les solutions existent.
2. (1 point) Trouver les équilibres x^* de l'équation $(\mathscr{E}_3)$ en fonction de r.
3. (1 point) Déterminer leur nature (stabilité) en fonction de r.
4. (1 point) Déduire des questions précédentes un diagramme de bifurcation qui sera dessiné avec le plus grand soin.
5. (1 point) Identifier les types de bifurcation.
6. (1 point) Dessiner avec le plus grand soin quelques trajectoires représentatives (suivant des valeurs significatives de r) des solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

Exercice 1.

(E_1) $t^2+x^2(t)-5=(x(t)+tx(t))x'(t)$

1. (E_1) n'est pas linéaire à cause - du terme x^2

- " " $(x+tx)$

2. (E_1) s'écrit

$$(t^2+x^2-5)\,dt - (x+tx)\,dx=0$$

de la forme $a(t,x)\,dt+b(t,x)\,dx=0$

où $a(t,x):=t^2+x^2-5$ et $b(t,x)=-(x+tx)$

$\frac{\partial a}{\partial x}=\boxed{2x}$ $\qquad \frac{\partial b}{\partial t}=\boxed{-x}$ $\qquad$ on a $\frac{\partial a}{\partial x}\neq\frac{\partial b}{\partial t}$

donc (E_1) n'est pas aux différentielles totales

3. On remarque que $\frac{\partial a/\partial x-\partial b/\partial t}{b}=\frac{2x+x}{-x(1+t)}=\boxed{\frac{-3}{1+t}}$ ne dépend que de t $(t\neq-1)$

Donc on choisit $\mu(t,x):=\mu(t)$

$$\mu(t)=e^{-3\int\frac{1}{1+t}dt}=e^{-3.\ln|1+t|}=\boxed{\frac{1}{(1+t)^3}}$$

si $t>-1$
on considèrera ici $t>-1$ car on prend $x(0)=1$ comme cond. initiale

On a alors: $-b\mu'(t)=-\left(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial t}\right)\mu(t)$ ok.

On cherche alors $(t,x)\mapsto w(t,x)$ t.q. $\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)=\mu(t).a(t,x)$

et $\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)=\mu(t)b(t,x)$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)=\frac{t^2+x^2-5}{(1+t)^3}\to ①$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)=\frac{-x(t+1)}{(t+1)^3}=\frac{-x}{(1+t)^2}\Rightarrow w(t,x)=\frac{-1}{(t+1)^2}\cdot\frac{x^2}{2}+g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}w(t,x)=+\frac{x^2}{2}.(+2(1+t)^{-3})+g'(t)$$

$$=x^2(1+t)^{-3}+g'(t)\to ②$$

En identifiant ① et ②

2

$$\frac{t^2+x^2-5}{(1+t)^3} = x^2(1+t)^{-3} + g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x^2}}{(1+t)^3} + \frac{t^2-5}{(1+t)^3} = \cancel{\frac{x^2}{(1+t)^3}} + g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-5}{(1+t)^3} = g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-5}{(1+t)^3} = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3} = g'(t)$$ (décomposition en éléments simples)

$$\Rightarrow g(t) = \ln|1+t| + \frac{2}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2}$$

J'ai $w(t,x) = \boxed{\frac{-x^2}{2(1+t)^2} + \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t} + \ln|1+t|}$ $t>-1$

et (E_1) s'écrit $w(t,x)=c$ càd

$$\frac{-x^2}{2(1+t)^2} + \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t} + \ln|1+t| = c \quad t\neq -1$$

5.
si $\boxed{x(0)=1}$ on a. $-\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \ln|1| = c \Rightarrow c = \frac{-1}{2} + 4 = \frac{-1+8}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}$

Et x est solution de:

$$\frac{x^2}{2(1+t)^2} = -\frac{7}{2} + \frac{2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t} + \ln(1+t)$$ si $t>-1$ (ici $x(0)=1$ l'impose)

$$x^2 = -7(1+t)^2 + 4 + 2(1+t) + 2(1+t)^2\ln(1+t) \quad t>-1$$

$$x^2 = 2(1+t) + (1+t)^2(\ln(1+t)-7) + 4 \quad t>-1$$

sous reserve que $2(1+t)+(1+t)^2(\ln(1+t)-7)+4>0$

à revoir

on a deux valeurs possible de x et une seule telle que $x(0)=1$

l'ecrire en fonction de c.

$$(1+t)\left[2+\left(\ln((1+t))-7\right)\right)+4).$$

Exercice 3

$|t|\, x' + x = t^2$

On résout le problème pour $t>0$ ou $t<0$

(i) $t<0$ $\quad (E_3) \Leftrightarrow -t x' + x = t^2 \Leftrightarrow \dfrac{x - t x'}{t^2} = 1 \Leftrightarrow -\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{x}{t}\right] = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{t} = -t + c_1$ où $c \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x = -t^2 + c_1 t$, $c \in \mathbb{R}$

Les solutions $(-t^2 + c_1 t,\ ]-\infty, 0[)$ sont solutions de (E_3), maximales dans $\mathbb{R}$

(ii) $t>0$ $\quad (E_3) \Leftrightarrow t x' + x = t^2 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}[t x] = t^2 \Leftrightarrow t x = \dfrac{t^3}{3} + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{c_2}{t}$

Les solutions $\left(\dfrac{t^2}{3} + \dfrac{c_2}{t},\ ]0, +\infty[\right)$, $c_2 \in \mathbb{R}$, maximales dans $\mathbb{R}$

(iii) Existe-t-il des solutions globales dans $\mathbb{R}$?

. On a $\lim\limits_{t \to 0^-} -t^2 + c_1 t = 0$ pour tout $c_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^2}{3} + \frac{c_2}{t} = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_2 > 0, \\ 0 & \text{si } c_2 = 0, \\ -\infty & \text{si } c_2 < 0. \end{cases}$$

Pour obtenir une solution continue, il faut donc $c_2 = 0$.

On a alors $\lim\limits_{t \to 0^-} (-t^2 + c_1 t)' = \lim\limits_{t \to 0^-} c_1 - 2t = c_1$

$$\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{t^2}{3}\right)' = \lim_{t \to 0^+} \frac{2}{3} t = 0$$

On obtient alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $c_1 = c_2 = 0$

Il existe dans une solution globale $x(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Alors on a les propriétés suivantes

- Existence: il existe $T>0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0-T;t_0+T];J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1

- Unicité: si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non-vide inclus dans $[t_0-T;t_0+T]$.

- Régularité: Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, alors x est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$

Exercice 1

1. (S) $\iff X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

a. $\det(A-\lambda I) = 0 \iff (\lambda+3)^2 = 0$

donc $\lambda_0 = -3$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité 2

1 val. On a un seul vecteur propre associé $K_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$ (1er vect. solution

1 vect. qui formera l'ensemble fondamental)

Nous allons donc chercher un autre vecteur solution X_2, linéairement indépendant de X_1 et vérifiant (S)

On cherche X_2 sous la forme $K_1 t e^{-3t} + P e^{-3t}$ où P est à trouver

Comme X_2 doit vérifier (S) on a $(AK_1 + 3K_1) t e^{-3t} + (AP + 3P - K_1) e^{-3t} = 0$

$$\iff \begin{cases} (A+3I)K_1 = 0 & \text{(on le savait déjà)} \\ \text{et} \\ (A+3I)P = K_1 & \Rightarrow \text{va nous permettre de trouver } P : \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1 pour P

$(A+3I)P = K_1 \iff \begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases}$ En choisissant $p_1 = \frac{1}{2}$, alors $p_2 = 0$ (on aurait pu prendre $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{6}$)

Et alors $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ va marcher. On a alors $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$

b. La forme des solutions générales de (S) est une combinaison linéaire de X_1 et X_2, autrement dit

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sont des constantes

1 pour X

- $\dot{x} = rx - \dfrac{x}{1+x^2}$

Find fixed points : $rx - \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

$$x\left[r - \frac{1}{1+x^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \text{ and } \begin{cases} x_* = 0 \\ x_*^2 = \dfrac{1}{r} - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ no additional solution if $r > 1$ or if $r < 0$

$\Rightarrow$ 2 more solutions if $0 < r < 1$

<u>Stability</u> : $f'(x) = r - \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{r(1+x^2)^2 - (1+x^2) + 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

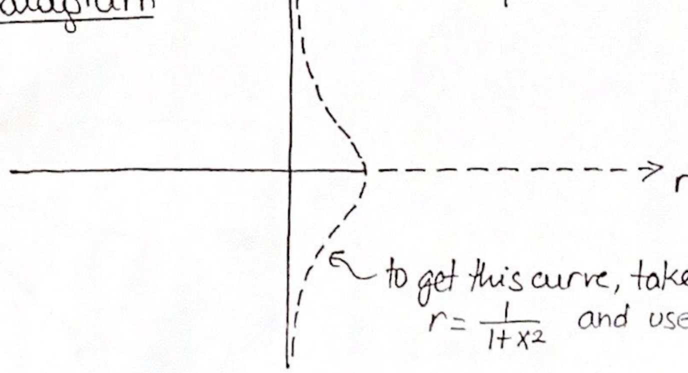
$f'(0) = \dfrac{r-1}{1} = r - 1 \Rightarrow$ stable if $r<1$, unstable if $r>1$

$$f'\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{r}-1}\right) = \frac{r\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right) + 2\left(\frac{1}{r}-1\right)}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}$$

$$= 2r^2\left(\frac{1}{r}-1\right) = 2r(1-r) \Rightarrow$$

this is >0 for $r \in [0,1]$
so both extra roots are unstable

<u>Bifurcation diagram</u>



to get this curve, take $r = \dfrac{1}{1+x^2}$ and use symmetry

bif. sous-critique