Université Claude Bernard Lyon 1 — Master 1 - Math. Appli. et Stat.
Semestre de printemps 2022-2023 — UE : Syst. Dyn. Printemps 2023

Partiel (1h30)

Mercredi 1er mars 2023

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. *45 minutes - 10 points*
On considère les trois systèmes suivants
(**les questions seront traitées séparément pour chacun des systèmes**) :

$$\text{a. } \begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1, \end{cases} \qquad \text{b. } \begin{cases} x_1' = 2x_1 + 8x_2, \\ x_2' = -x_1 - 2x_2, \end{cases} \qquad \text{c. } \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, \\ x_1' = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Pour chacun de ces systèmes :

1. (1.5 point) Écrire le système sous la forme vectorielle $X' = AX$ où X et A seront à préciser.
2. (1.5 point) Calculer les valeurs propres de A.
3. (1.5 point) En déduire le type d'équilibre que vous obtenez.
4. (1.5 points) Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
5. (1 point) Pour les systèmes a. et c. en déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques.
6. (3 points) Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans les repères avant et pour les systèmes a. et c. après changement de base par les matrices de passage.
7. Bonus : (+1 point) Pour le système c. Donner l'expression et tracer la solution passant par $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -4$.

<u>Exercice 2.</u> *45 minutes - 10 points*
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(\mathscr{E}_2) \quad x' = f_r(x) \text{ où } f_r(x) = x^3 + (1-r)x^2 + (r^2-1)x - r^3 + r^2 + r - 1,$$

avec $r \in \mathbb{R}$ est un paramètre, et x est une fonctions définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

1. (1 point) Est-ce que cette équation est linéaire ? Autonome ? Sous forme normale ? Justifier.
2. (1 point) Justifier que $(\mathscr{E}_2)$ munie d'une condition initiale $x(t_0) = x_0$, avec $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ possède localement une unique solution.
3. (1 point) Est-ce que les solutions de $(\mathscr{E}_2)$ sont monotones ? Si oui, justifier pourquoi.
4. (7 points) Dans la suite, nous souhaitons étudier le comportement asymptotique des solutions de $(\mathscr{E}_2)$.
   (a) (1 point) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, nous pouvons écrire
   $$f_r(x) = (x - r + 1)(x^2 + r^2 - 1).$$
   (b) (6 points) On rappelle que dans le plan $(0, x, y)$, l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $k > 0$ est
   $$x^2 + y^2 = k^2.$$
      i. (1 point) Déduire du rappel, que le diagramme de bifurcation peut se représenter par l'intersection d'une droite et d'un cercle.
      ii. (1 point) Montrer alors graphiquement que suivant les valeurs de $r \in \mathbb{R}$ (qu'il faudra déterminer précisément) le problème possède 1, 2 ou 3 équilibres.
      iii. (1 point) Donner explicitement les valeurs de ces équilibres en fonction de r.
      iv. (1 point) Graphiquement ou analytiquement, déterminer la stabilité de ces équilibres en fonction de r.
      v. (1 point) Représenter avec soin le diagramme de bifurcation.
      vi. (1 point) dessiner quelques trajectoires types en fonction de r.