INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles et modélisation

Contrôle Partiel Ecrit- EDO
9 octobre 2012

Avant propos.

La durée du partiel est de 1h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable ne sera durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Question de cours (10 minutes)(4 points)

Enoncer (sans le démontrer) le théorème de Cauchy-Lipschitz relatif à l'existence et l'unicité locale des solutions d'un problème de Cauchy (il faudra bien sûr rappeler la définition d'un problème de Cauchy).

Exercice 1 (20 minutes)(6 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$x^{1/2}x' + x^{3/2} = 1,$$

avec la condition initiale $x(0) = 4$.

1. Donner *a priori* l'intervalle sur lequel devrait être définie la solution x.
2. Résoudre cette équation différentielle.
3. La solution trouvée est-elle maximale ou globale sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (30 minutes)(10 points)

1. Considérons l'équation différentielle

$$x' = 4x^2 - 16.$$

   (a) Montrer que l'on a l'existence et l'unicité locale de la solution de ce problème avec une condition initiale $x(t0) = x_0$ donnée.
   (b) Chercher les équilibres de cette équation.
   (c) Etudier leur stabilité.

(d) Tracer les trajectoire significatives (en prenant différentes conditions initiales).

(e) Résoudre explicitement les solutions de cette équation avec la condition initiale $x(0) = 1$.

2. Considérons l'équation différentielle suivante

$$x' = 1 - e^{-x^2}.$$

(a) Etudier les équilibres de cette équation.

(b) Etudier leur stabilité

(c) Tracer les trajectoires significatives (en prenant différentes conditions initiales).

Partiel 3BIM - 9 octobre 2012 - Corrigé

$\boxed{4}$ Cours : Etant donnée une EDO du 1er ordre sous forme normale $x' = f(t,x)$ pour $(t,x) \in I \times J$ et un point $(t_0, x_0) \in I \times J$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions x t.q. $x(t_0) = x_0$.

1

Soient f continue de $U \to \mathbb{R}$ (U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et $(t_0, x_0) \in U$.
On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0).

1 Autrement dit, il existe un voisinage de (t_0,x_0) dans U et $L > 0$ t.q. pour tous (t,x), (t,y) dans ce voisinage $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x-y\|$

Alors on a les propriétés suivantes :

1 existence : il existe $T > 0$ et x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

1 Unicité : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$

Régularité : Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, alors x est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$

Exercice I $\boxed{6}$

1. L'équation est $x^{1/2} x' + x^{3/2} = 1$. On suppose que $t \in I$, intervalle pour lequel $x(t) > 0$ (on a $\sqrt{x(t)}$ et on devra diviser par $\sqrt{x(t)}$.

1

A noter que $x \equiv 0$ n'est pas solution.

2. On suppose $t \in I$ (I à déterminer plus tard) et on divise par $x^{1/2}$ pour obtenir $x' + x = x^{-1/2}$ On est dans le cadre d'une équation de Bernoulli :

1 $x' + P(t) x + Q(t) x^r = 0$ où $P(t) = 1$, $Q(t) = -1$ et $r = -\frac{1}{2}$

$x' + x - x^{-1/2} = 0$

On pose alors $u = x^{1-r} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{3/2}$ on obtient alors l'EDO en u :

$u' + (1-2)P(t)\,u + (1-2)Q(t) = 0$

càd $u' + \frac{3}{2} u = \frac{3}{2}$ que l'on résout : en multipliant chacun des membres par $e^{\int_0^t \frac{3}{2} ds} = e^{3/2\, t}$

1 (ne pas oublier que $t_0 = 0$ et $x(0) = 4$)

$$\left(e^{3/2\, t} u\right)' = \frac{3}{2} e^{3/2\, t}$$

$$\int_0^t \left(e^{3/2\, s} u\right)' ds = \int_0^t \frac{3}{2} e^{3/2\, s} ds$$

soit $\left[e^{3/2\, s} u(s)\right]_0^t = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3/2} \left[e^{3/2\, s}\right]_0^t$

$\Leftrightarrow e^{3/2\, t} u(t) - u(0) = e^{3/2\, t} - 1 \quad \Leftrightarrow e^{3/2\, t} u(t) = u(0) - 1 + e^{3/2\, t}$

1 $\Leftrightarrow u(t) = e^{-3/2\, t}(u(0) - 1) + 1.$

or $x(0) = 4$ donc $u(0) = x(0)^{3/2} = 4^{3/2} = 8$ et donc

$$u(t) = 7 e^{-3/2\, t} + 1$$

1 Donc $x(t) = u^{2/3}(t) = \left(7 e^{-3/2\, t} + 1\right)^{2/3} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

1 3. x est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc x est globale sur $\mathbb{R}$

Exercice II $\boxed{10}$

1.a. On a $x' = 4x^2 - 16$ que l'on peut écrire sous la forme $x' = f(x)$ où $f : x \mapsto 4x^2 - 16$

f est dérivable sur tout intervalle, de dérivée continue (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ même)

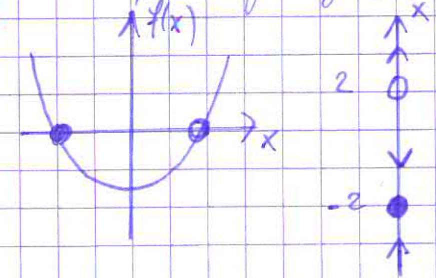
1 donc f est localement lipschitzienne, a fortiori au voisinage de (t_0, x_0) donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz on a existence et unicité de la solution de l'équation

b. Les équilibres x^* de l'EDO satisfont $f(x^*) = 0$ càd $4x^{*2} - 16 = 0$

1 Autrement dit $(2x^* - 4)(2x^* + 4) = 0$ On a 2 équilibres $x_+^* = 2$ et $x_-^* = -2$

c. On peut le faire graphiquement ou en étudiant le signe de $f'(x)$ en 2 et -2 (au choix)

2

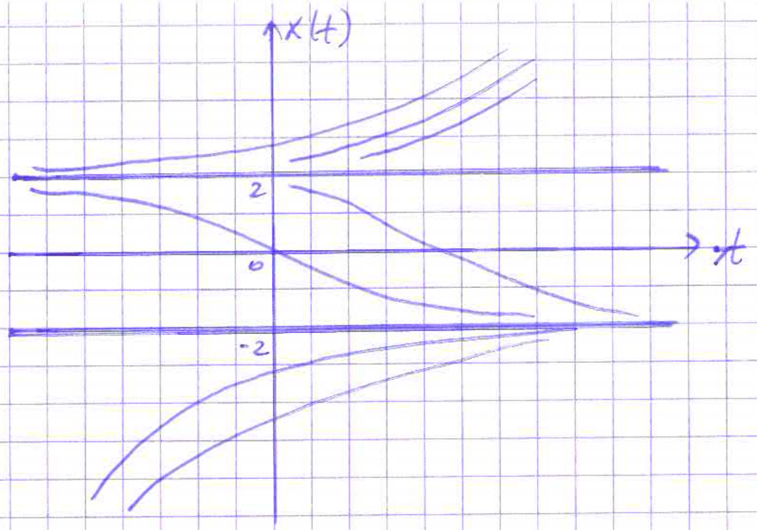


$x_-^* = -2$ est un équilibre stable $\quad (f'(x) = 8x)$

$x_+^* = 2$ est " " instable $\quad$ donc $f'(2) > 0$ et $f'(-2) < 0$

d.

1



e. On prend $x(0) = x_0$. $x' = 4x^2 - 16$

1 On divise par $4x^2-16$ (en supposant que $x_0 \neq 2$ ou $x_0 \neq -2$)

On a alors $\dfrac{x'}{x^2-4} = 4$. On décompose en éléments simples et on a:

$\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$ ce qui donne $A = 1/4$ et $B = \dfrac{-1}{4}$

et donc $\displaystyle\int_1^x \frac{ds}{s^2-4} = \int_0^t 4\,d\sigma \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_1^x \frac{ds}{s-2} - \frac{1}{4}\int_1^x \frac{ds}{s+2} = 4t$

$$\Leftrightarrow \left[\ln|x-2| - \ln|\underset{\ln|1|=0}{1-2}| - \ln|x+2| + \ln|\underset{\ln 3}{1+2}|\right] = 16t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \ln 3 = 16t$$

$x(0) = 1$ donc au voisinage de 0, $x(t)$ est au voisinage de 1, donc $x+2>0$

et $x-2<0$

on a donc $\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)$ et on a:

$$\ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) = 16t - \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} = \frac{1}{3}e^{16t}$$

$$\Leftrightarrow 2-x = (x+2)\frac{1}{3}e^{16t} \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3}e^{16t} = x + \frac{1}{3}xe^{16t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(1-\frac{1}{3}e^{16t}\right)}{1+\frac{1}{3}e^{16t}} = x(t)$$

$x(t) = \dfrac{2(3-e^{16t})}{3+e^{16t}}$, $x(0) = \dfrac{+4}{4} = +1$.

2. a. $x' = 1 - e^{-x^2}$

On pose $f(x) = 1 - e^{-x^2}$

1 Les équilibres x^* de l'équation satisfont $f(x^*) = 1 - e^{-x^{*2}} = 0$

càd $e^{-x^{*2}} = 1$.

$\Leftrightarrow \quad -x^{*2} = \ln 1 = 0$

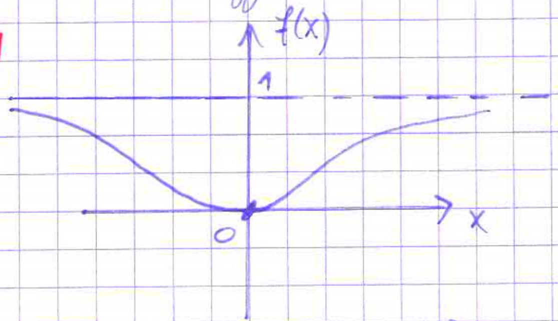
soit $\boxed{x^* = 0}$ il n'y a qu'un seul équilibre.

1 b. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f'(0) = 0$ il faut dériver une 2ème fois

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$ et $f''(0) = -2 < 0$. la concavité est tournée vers le haut

on a affaire à un shunt positif.

1



x_0^* est un shunt positif

c.

1