Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
MASS 42 EDO Printemps 2014

Contrôle Final Ecrit - Equations différentielles
5 juin 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (40 minutes) (6 points)

1. (4 points) On considère l'équation différentielle scalaire suivante :

$$x' = \alpha x + f(t),$$

vérifiant $x(t_0) = x_0$ où $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\alpha \in \mathbb{R}$, t_0 in I et $x_0 \in \mathbb{R}$.
BONUS(+1 point) : comment appelle-t-on la solution de cette équation ?

2. (2 points) Donner la définition de l'exponentielle d'une matrice. Exprimer alors la solution du système $X' = AX + F(t)$ vérifiant $X(t_0) = X^0$, où A est une matrice carrée de dimension n, X fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X^0 \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 1 (40 minutes) (8 points (4+4))

Pour les 2 systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & -x & + & 3y, \\ \dot{y} & = & -3x & + & 5y, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 5x & + & y, \\ \dot{y} & = & -2x & + & 3y, \end{array} \right.$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. (1 point) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. (0.5 point) En déduire la matrice de passage P.
3. (1 point) Donner les solutions du système dans la base où la matrice est diagonale (ou de Jordan).
4. (1 point) Tracer (avec soin) les orbites représentant ces solutions.

5. (0.5 point) En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques dans la base initiale.
6. BONUS(+2 points (1+1)) : tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère initial.

Exercice 2 (40 minutes) (8 points)

Considérons un système non linéaire $X' = F(X)$, dont le système linéarisé $Y' = AY$ où X et Y sont définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, F vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée de dimension n. Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

les coefficients a_i étant déterminés par $\det(A - \lambda I)$.
Considérons les déterminants des matrices suivantes :

$$H_1 = |a_1|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

On a alors le résultat suivant que l'on ne demande pas de démontrer :
l'équilibre X^* du système $X' = F(X)$ est localement asymptotiquement stable si et seulement si $H_i > 0$ pour tout $i = 1, ...n$.

1. (1 point) Exprimer cette condition en dimension 1 en fonction du signe de a_1.
2. (2 points) Exprimer cette condition en dimension 2. Retrouver un résultat du cours connu sur le signe de la trace et le déterminant que l'on rappellera. Noter qu'en dimension 2, le terme $a_3 = 0$.
3. (1 point) Exprimer cette condition en dimension 3. Noter que a_4 et a_5 sont nuls dans ce cas là.
4. Application : On considère le système linéaire suivant :

$$(S_4) \quad \begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2y + z, \\ \dot{z} &= -Kx - z, \end{cases}$$

   où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et K est un nombre réel.

   (a) (1 point) Donner le polynôme caractéristique permettant de trouver les valeurs propres de ce système en fonctions de K.

   (b) (1 point) D'après la condition de l'introduction, donner les conditions sur K pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.

   (c) (2 points) Le vérifier avec le résultat "classique" connu du cours sur le signe de la partie réelle des valeurs propres.
5. Bonus (+2 points) : exprimer cette condition en dimension 4.