

Contrôle Partiel Ecrit - Equations Différentielles
20 mars 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (30 minutes) (6 points)

1. (3 points) Enoncer et démontrer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation différentielle.
2. (3 points) Enoncer sans le démontrer, le théorème des bouts.

Exercice 1 (30 minutes) (7 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \quad t + (t^2 + 4)x(t)x'(t) = 0,$$

pour $t \in I \subset \mathbb{R}$, où I sera à déterminer.

1. (1 point) Expliquer pourquoi cette équation (E_1) n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que cette équation (E_1) n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (2 points) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation (E_1) .
4. (2 points) Exprimer alors les solutions x dans une équation implicite pour $t \in I$, et déterminer l'intervalle I maximal ou global dans \mathbb{R} (justifier).
5. (1 point) Donner la solution de (E_1) satisfaisant $x(4) = 0$.

Exercice 2 (30 minutes) (7 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{C}_1) \begin{cases} x'(t)(4-t^2)^2 + 8tx^2(t) = 0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où t et t_0 appartiennent à un intervalle I inclus dans \mathbb{R} qu'il faudra déterminer dans cet exercice (il pourra exister plusieurs intervalle I possibles), et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. (1 point) Est-ce que cette équation est linéaire. Justifier.
2. (1 point) A-t-on existence et unicité des solutions de ce problème (\mathcal{C}_1) sur $U = I \times \mathbb{R}$? Justifier.
3. (1.5 point) On suppose $x_0 = 0$. Quelle est la solution de (\mathcal{C}_1) ? Est-elle maximale ou globale dans $]0, +\infty[$? Justifier.
4. (3.5 points) On suppose maintenant $x_0 \neq 0$.

(a) (1 point) Calculer

$$\int \frac{8t}{(4-t^2)^2} dt.$$

Indication : penser à utiliser la dérivée de $4-t^2$.

- (b) (1 point) En déduire les solutions de (\mathcal{C}_1) en fonction de x_0 . Détailler les calculs.
- (c) (1.5 point) Les solutions trouvées sont-elles maximales ou globales dans \mathbb{R} en fonction de x_0 ? Justifier.
5. (Bonus : +1 point) Donner toutes les solutions maximales et globales dans \mathbb{R} de ce problème.

Exercice 3 (BONUS : +4 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) \quad t^2 x'(t) + x^2(t) = tx(t),$$

pour tout $t \in I$, où I est un intervalle maximal dans \mathbb{R} qu'il faudra préciser (il pourra exister plusieurs intervalles I possibles).