Laurent PUJO-MENTJOUET
pas de t

Bât. BRACONNIER - DOUA - 246

pujo@math.univ-lyon1.fr

Introduction sur les suites

I Définition générale

<u>Définition</u> on appelle suite toute fonction
$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, ...

réels

Le nombre u_n est appelé <u>terme général</u> de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n \in \mathbb{N}$

⚠ <u>ATTENTION</u> ne pas confondre u_n : nombre par exemple $\sqrt{3}$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonction : suite

par conséquent <u>il ne faut pas</u> écrire ~~u_n est croissante~~

mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Il existe 2 façons de décrire les suites :

① Formulation <u>explicite</u> : $u_n = f(n)$

② Formulation <u>par récurrence</u> : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ donné

<u>Remarque</u> :

- avantage majeur de la formulation explicite : pour calculer u_{500} a juste à calculer $u_{500} = f(500)$ le résultat est immédiat
- tandis que pour la formulation par récurrence, pour calculer u_{500}, il faut connaître u_{499}, pour calculer u_{499} il faut connaître u_{498} ...

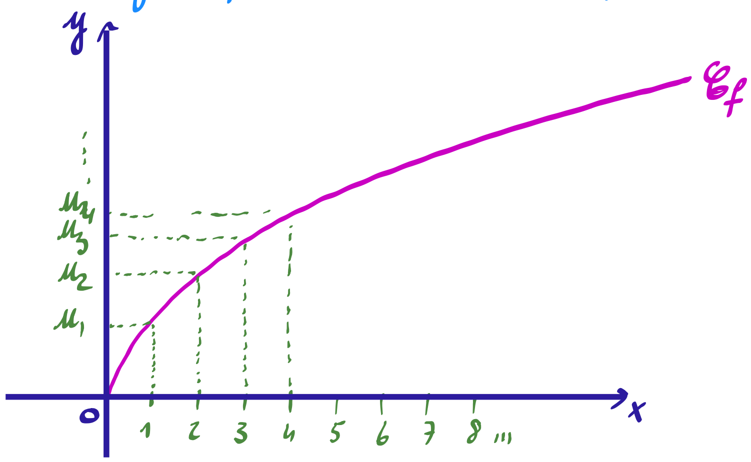
II Représentation graphique des suites

Il existe 2 façons de les représenter, selon qu'elles sont formulées de façon explicite ou par récurrence.

Exemples : ① FORMULATION EXPLICITE

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \sqrt{n}$ $\quad (u_n = f(n))$



Remarque Dans le cas de la formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

① si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

① si f est croissante alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

② si f est decroissante " " " décroissante

③ si f est constante " " " stationnaire

② FORMULATION PAR RÉCURRENCE

On considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 4 \end{cases}$ différence par rapport à la formulation explicite

ⓐ est-ce que la suite est bien définie ? c'est à dire est-ce que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$?

Pour le montrer on utilise la démonstration par récurrence :

on va montrer que

$P_n = " u_n \geq 0 "$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

étape 1 : initialisation : P_0 vraie ? P_0 : $u_0 = 4 \geq 0$ vrai

Hérédité étape 2 On suppose P_k est vraie (càd $u_k \geq 0$) montrons que P_{k+1} est alors vraie (càd $u_{k+1} \geq 0$)

Comme P_k est vraie (par hypothèse) on a $u_k \geq 0$

Comme P_k est vraie (par hypothèse) on a $u_k \geq 0$

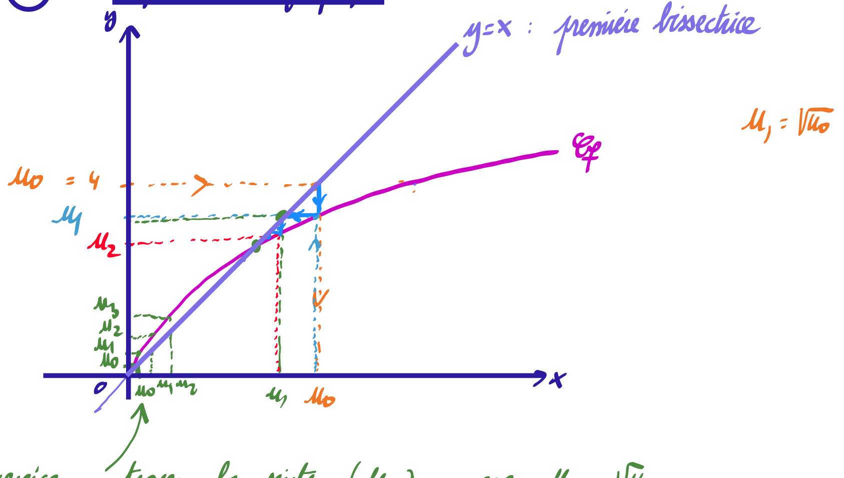
Donc $u_{k+1} = \sqrt{u_k}$ existe et comme c'est une racine on a $u_{k+1} \geq 0$

ainsi P_{k+1} est vraie

étape 3 : Conclusion on a alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(si $u_0 \geq 0$.)

b) Représentation graphique

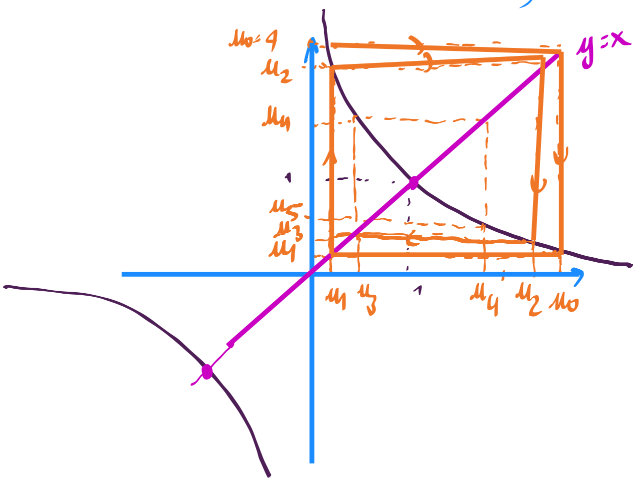


Exercice : 1. tracer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

mais avec $u_0 = 0.1$

- tracer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$ et $u_0 = 4$

on a $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$



Ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée.

Pour résumer : • Quand la suite est formulée de façon explicite :

Pour résumer : • Quand la suite est formulée de façon explicite :

$u_n = f(n)$ → si f est croissante la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

→ " " décroissante " " est décroissante

• Quand la suite est formulée par récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ → f est croissante : → si $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

→ si $u_0 > u_1$ " " est décroissante

→ f est décroissante → la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

III Quelques suites classiques :

1. Suites arithmétiques :

Définition : On appelle suite arithmétique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre réel a (appelé RAISON) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Exemple : Si $u_0 = 2$ et $a = 3$ on a $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Question : peut-on avoir une formulation explicite ?
oui

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
u_1 &= u_0 + a \\
u_2 &= u_1 + a = u_0 + a + a = u_0 + 2a \\
u_3 &= u_2 + a = u_0 + 3a \\
&\vdots \\
u_n &= u_0 + na
\end{aligned}$$

Montrons que $\boxed{u_n = u_0 + na}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Par récurrence :

On pose P_n : "$u_n = u_0 + na$"

1. **Initialisation :** $u_0 = u_0 + 0.a = u_0$ donc P_0 est vraie
2. **Hérédité :** On suppose P_k vraie pour un certain rang k
   c'est à dire que $u_k = u_0 + ka$
   Montrons que P_{k+1} est vraie (c'est à dire : montrons que $u_{k+1} = u_0 + (k+1)a$

$u_{k+1} = u_k + a$ par définition or par ~~hypothèse de récurrence~~ on a $u_k = u_0 + ka$

$= u_0 + ka + a$

$= u_0 + (k+1)a$ donc P_{k+1} est vraie

3 Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, càd $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question : que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
+ u_1 &= u_0 + a \\
+ u_2 &= u_0 + 2a \\
+ u_3 &= u_0 + 3a \\
+ u_4 &= u_0 + 4a \\
&\vdots \\
+ u_n &= u_0 + na
\end{aligned}$$

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_n}_{\sum_{k=0}^{n} u_k} = (n+1)u_0 + a + 2a + 3a + \dots + na$$

$$= (n+1)u_0 + a(1+2+3+\dots+n)$$

$$= (n+1)u_0 + a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(u_0 + \frac{na}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2u_0}{2} + \frac{na}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2u_0 + na}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_0 + na}{2}\right)$$

$$= \boxed{(n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)}$$

GAUSS

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$
$$+ \; S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$
$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Suites géométriques

Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre réel r (appelé RAISON) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Exemple : $r = 3$ et $u_0 = 2$ $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Remarques :
- si $\boxed{r=0}$ la suite est stationnaire $(u_n = 0)$ à partir de $n=1$
- si $\boxed{r=1}$ " " " pour tout $n\in\mathbb{N}$

On suppose dans ce qui suit que $\boxed{r\neq 0}$ et $\boxed{r\neq 1}$

Formulation explicite :

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
u_1 &= r u_0 \\
u_2 &= r u_1 = r^2 u_0 \\
u_3 &= r u_2 = r^3 u_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = r^n u_0}$$

Exercice : montrer par récurrence que $u_n = r^n u_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Quelle est la somme : $u_0 + u_1 + \dots + u_n$?

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
+\ u_1 &= r u_0 \\
+\ u_2 &= r^2 u_0 \\
&\vdots \\
+\ u_n &= r^n u_0
\end{aligned}$$

$$+\; u_n = r^n u_0$$

$u_0+u_1+\dots+u_n = u_0(1+r+r^2+\dots+r^n)$ que vaut $1+r+r^2+\dots+r^n$.

Rappel : $(1+r+r^2+\dots+r^n)(1-r) = 1+\cancel{r}+\cancel{r^2}+\dots+\cancel{r^n}$
$\qquad -\cancel{r}-\cancel{r^2}-\dots-\cancel{r^n}-r^{n+1}$
$\qquad = 1-r^{n+1}$

En divisant par $1-r$ (on peut le faire car on a supposé $r\neq 1$)

on obtient $1+r+\dots+r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Conclusion : $\boxed{u_0+u_1+\dots+u_n = u_0 \cdot \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}}$

3. Suites arithmético-géométriques

Définition : On appelle suite arithmético-géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe 2 nombres réels a et r (appelés raison) tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 = \text{donné} \end{cases}$$

Remarques :
1. si $\boxed{r=1}$ on a la suite arithmétique
2. si $\boxed{a=0}$ " " " " géométrique

On considère dans ce qui suit : $\boxed{a\neq 0}$ et $\boxed{r\neq 1}$

Question : comment obtient-on la formulation explicite ?

Méthode :

étape 1 : On pose $f : x \mapsto rx+a$ (ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$)
et on cherche un nombre réel ℓ t.q. $\boxed{f(\ell)=\ell}$ càd un point fixe de f

$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow r\ell+a=\ell$ (*)

$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow r\ell+a=\ell$

$\Leftrightarrow r\ell-\ell=-a$

$\Leftrightarrow (r-1)\ell=-a$

$\Leftrightarrow \boxed{\ell=\frac{-a}{r-1}}$ (on peut le faire car on a supposé $r\neq 1$)

<u>étape 2</u> On utilise une suite <u>AUXILIAIRE</u> : on définit $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n=u_n-\ell$

Montrons alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\boxed{r}$

soit $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-\ell$

$=ru_n+a-\ell$ comme $v_n=u_n-\ell$ alors $\boxed{u_n=v_n+\ell}$ (*)

$=r(v_n+\ell)+a-\ell$

$=rv_n+\underbrace{r\ell+a-\ell}_{=0}$ d'après (+) $r\ell+a=\ell$ donc $r\ell+a-\ell=0$

$\boxed{v_{n+1}=rv_n}$

<u>Conclusion</u> : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme $\boxed{v_0=u_0-\ell}$

Grâce à ça, on peut exprimer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon explicite

<u>étape 3</u> : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0.r^n$

et comme (*) $u_n=v_n+\ell$ on a $u_n=v_0.r^n+\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $v_0=u_0-\ell$

càd $\boxed{u_n=(u_0-\ell).r^n+\ell}$ où $\boxed{\ell=\frac{-a}{r-1}}$

Exercice : ① Déterminer de façon explicite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

② Représenter cette suite sur un graphe

solution ① étape 1 On pose $f : x \mapsto 2x+3$

- On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ t.q. $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell + 3 = \ell$$
$$\iff 2\ell - \ell = -3$$
$$\iff \boxed{\ell = -3}$$

étape 2 On pose (*) $v_n = u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\boxed{v_0} = u_0 + 3 = \boxed{4}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{v_{n+1}} = u_{n+1} + 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1}} = u_{n+1}+3$$
$$= 2u_n+3+3$$
$$= 2u_n+6$$
$$= 2(v_n-3)+6$$
$$= 2v_n-6+6 = \boxed{2v_n}$$

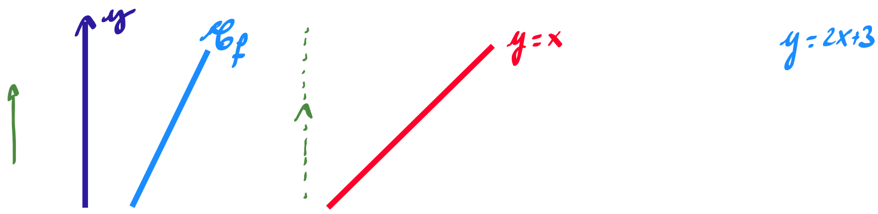
or $^{(*)}$ $u_n = v_n-3$

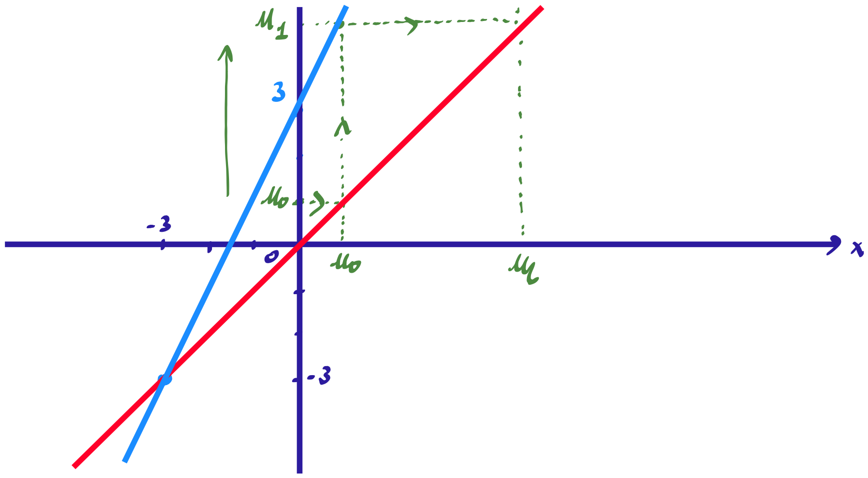
Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 4

étape 3 D'après ce qui précède $v_n = 4.2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $u_n = v_n-3 = 4.2^n-3 = 2^2.2^n-3 = 2^{2+n}-3$

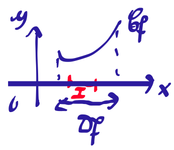
2. Représentation graphique





u_1
3
u_0
-3
0
u_0
u_1
x
-3

- 12 MARS 2026 -



III Suites récurrentes : généralités

Question : comment étudier une suite récurrente de façon générale (quand on ne peut pas trouver sa formulation explicite) ?

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} \quad \text{où } f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{où } I \subset \mathcal{D}_f)$$

Le but est de savoir ① si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie
c-à-d que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{D}_f$

② est-ce que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe ?

Exemple : dans l'exercice précédent (suite arithmético-géométrique)

Exemple : dans l'exercice précédent (suite arithmético-géométrique)

$$\begin{cases} u_{n+1} = \underbrace{2u_n+3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On pose $f : x \mapsto 2x+3$ ici $D_f = \mathbb{R}$

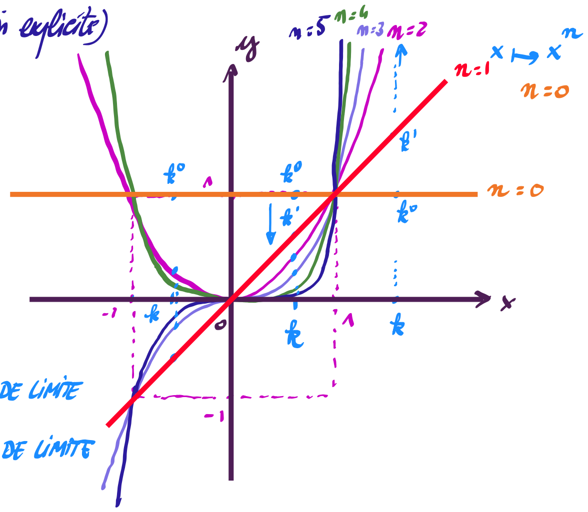
① Comme $D_f = \mathbb{R}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

② Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

On a vu dans l'exercice (voir plus haut) que $\boxed{u_n = 2^{n+2} - 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (formulation explicite)

k^n

Rappel :
- si $-1 < x < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$
- si $x = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$
- si $x > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$
- si $x = -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ = PAS DE LIMITE
- si $x < -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$ = PAS DE LIMITE



Rappel :
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (ℓ un nombre fini) : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$: on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (de première espèce)
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas (PAS DE LIMITE) " " est divergente de 2ème ESPÈCE

Ici on a : $u_n = \underbrace{2^{n+2}}_{k^{n+2}} - 3$

k^{n+2} avec $k = 2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+2} = +\infty$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = "+\infty - 3" = \boxed{+\infty}$ donc la suite diverge.

Proposition : Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathcal{D}_f$) est $\boxed{\text{CONTINUE}}$ sur I
et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est <u>convergente</u> vers l ($l \in \mathbb{R}$)
alors l vérifie $\boxed{f(l) = l}$

alors ℓ vérifie $\boxed{f(\ell)=\ell}$

c'est à dire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est nécessairement vers un point fixe (on dit alors que le point fixe est ATTRACTIF)

Preuve :

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

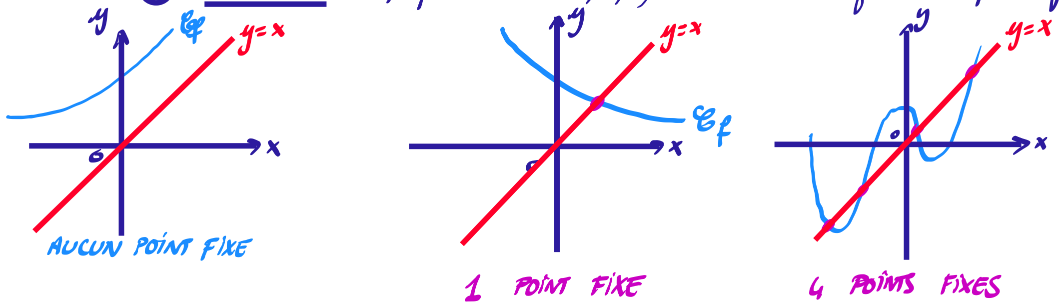
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$

(hypothèse) $\ell = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell)$

f continue alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$

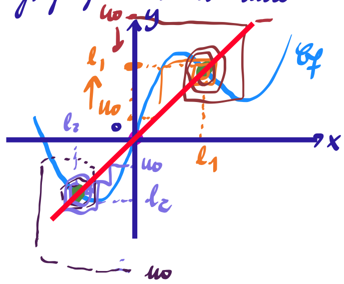
Remarque : ① bonne nouvelle, toutes fonctions "classiques" sont continues sur leur ensemble de définition

② Attention f peut avoir $0, 1, 2, \ldots$ voire une infinité de points fixes



Plusieurs questions se posent alors :

1. Combien la fonction f possède-t-elle de points fixes ?
2. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers quelle point fixe converge-t-elle ?
3. Comment savoir si la suite converge ?
4. Comment représenter graphiquement la suite ?



● POINT FIXE ATTRACTIF

○ POINT FIXE REPULSIF

Réponse : • **à la question 4** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

ⓐ si f est croissante et si $u_0 < u_1$: alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

ⓑ " " " " $u_0 > u_1$: " " décroissante

ⓒ si f est décroissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

• **à la question 1** ; est-il possible de savoir si f possède des points fixes ou non ?

ⓐ si on peut les calculer "à la main" c'est mieux (on connaît leur valeur)

ⓑ **sinon on utilise le résultat suivant :**

• **STABILITÉ D'UN INTERVALLE**

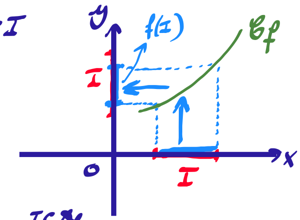
$f(I)$: l'image de l'intervalle I par f (tous les $f(x)$ avec $x \in I$)

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset D_f$)

Définition On dit qu'un intervalle I est $\boxed{\text{stable}}$ par f si $\boxed{f(I) \subset I}$

Définition On dit qu'un intervalle I est $\boxed{\text{stable}}$ par f si $\boxed{f(I) \subset I}$

c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$



Remarque : on a besoin de cette stabilité pour 2 choses

① ça permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

en effet : comme $u_{n+1} = f(u_n)$ si $u_n \in I$, alors $\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \in I \subset D_f$ (si I est stable)

. Donc si $u_0 \in I$ et I est stable par f $\Big\}$ alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

② si $f(I) \subset I$
si c'est inclut strictement (on écrit $f(I) \subsetneq I$)
alors on retrécit le domaine à chaque fois qu'on applique f

ex : si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(I) \subsetneq I$

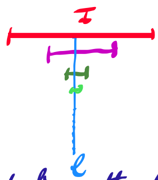
si $u_0 \in I$, $u_1 = f(u_0) \in f(I) \subset I$

$u_2 = f(u_1)$

$\quad = f(f(u_0)) \in f(f(I))$

$\vdots$

$u_{n+1} = f(f(f(f \ldots f(u_0))))$



et on a toutes les chances de se diriger vers un point fixe attractif

Théorème : Lorsque I est un intervalle $\boxed{\text{stable}}$ par f (càd $f(I) \subset I$) avec $\boxed{I \subset D_f}$ (domaine de définition de f) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné } \boxed{\text{dans } I} \end{cases}$ est une suite bien définie, c'est à dire que $u_n \in D_f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• POINT FIXE

Théorème : théorème d'existence d'un point fixe

Soient $I = [a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue avec $[a,b] \subset D_f$

On suppose que $[a,b]$ est STABLE par f (càd que $f([a,b]) \subset [a,b]$)

(ou encore si $a \leq x \leq b$ alors $a \leq f(x) \leq b$)

alors il existe <u>AU MOINS</u> un point fixe de f dans $[a,b]$ c'est à dire qu'il existe $\ell \in [a,b]$ t.q. $\boxed{f(\ell)=\ell}$

Réponse à la question 3 : comment savoir si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Pour ça, on a un résultat : la condition nécessaire de convergence

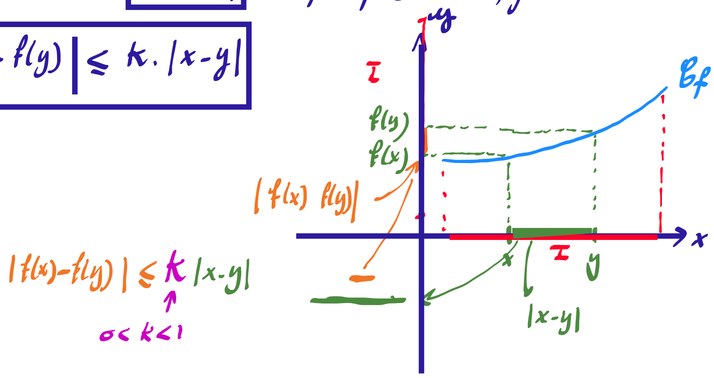
ⓐ FONCTION STRICTEMENT CONTRACTANTE

Définition : (FONCTION STRICTEMENT CONTRACTANTE)

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset D_f$

Dire que f est STRICTEMENT CONTRACTANTE sur I signifie qu'il existe un nombre réel k avec $\boxed{0<k<1}$ tel que pour tous $x, y \in I$

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \leq k.|x-y|}$$



Remarque : si f est strictement contractante alors il existe $0<K<1$ t.q.

pour tous $x, y \in I$

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$$

or si $x \neq y$ c'est equivalent à :

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq K < 1$$

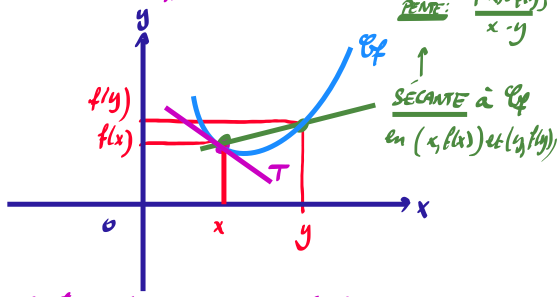
or : **Rappel** : $|a| \leq r \iff -r \leq a \leq r$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le k < 1$$

$$(\Leftrightarrow)\ \boxed{-1} < -k \le \boxed{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}} \le k < \boxed{1}$$

pente de la sécante

OR : Rappel : $|a| \le r \Leftrightarrow -r \le a \le r$



et RAPPEL $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \boxed{f'(x)}$ pente de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en $(x, f(x))$

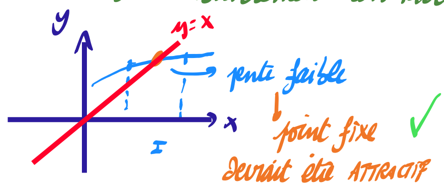
on a alors le théorème suivant :

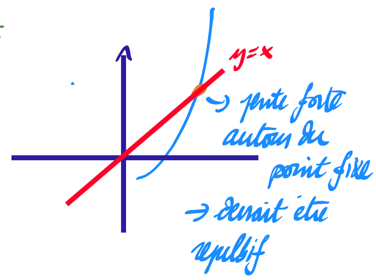
Théorème : théorème des fonctions strictement contractantes

soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathcal{D}_f$, avec f dérivable sur I

si f' vérifie $\boxed{\max\limits_{x \in I} |f'(x)| = k < 1}$ Alors f est strictement contractante

autrement dit : si f varie "très peu" (la pente des tangentes est toujours entre -1 et 1) alors f a des grandes chances d'être strictement contractante





façon concrète dans les exercices :

① on donne f dans l'énoncé (on vérifie que f est dérivable sur I)

② on calcule $f'(x)$ pour tout $x \in I$

③ on calcule $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & \text{si } f'(x) \ge 0 \\ -f'(x) & \text{si } f'(x) < 0 \end{cases}$

④ on cherche $\max |f'(x)|$. si c'est < 1 : alors f est strictement contractante sur I

Exercice, Est-ce que $f : x \mapsto x^2$ est strictement contractante sur $[1, 2]$

ici : ① $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

② $f'(x) = 2x$

③

○ $) = 2x$

③ Calculons $|f'(x)|$ sur $[1,2]$:

si $1 \leq x \leq 2$ $\boxed{2 \leq 2x \leq 4}$, donc $f'(x)$ est toujours ≥ 0 sur $[1,2]$

donc $|f'(x)| = 2x$

④ et $\max_{x \in [1,2]} |f'(x)| = 4 > 1$. donc f n'est pas strictement contractante sur $[1,2]$

• même question sur $[-\frac{1}{4}, 0]$

①
②} même réponse

③ si $\boxed{-\frac{1}{4} \leq x \leq 0}$, $-\frac{2}{4} \leq f'(x) = 2x \leq 0 \times 2$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0}$

donc $\frac{1}{2} \geq |f'(x)| \geq 0$

④ alors $\max_{x \in [-\frac{1}{2}, 0]} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ donc sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ f est strictement contractante

On peut alors énoncer le théorème suivant:

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Théorème : théorème du POINT FIXE

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $I \subset D_f$ telle que

1. f est continue sur I
2. I est stable par f (càd que $f(I) \subset I$)
3. f est strictement contractante sur I (càd $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$) si f dérivable

alors f admet un unique point fixe l avec $l \in I$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$ converge vers l

on dit alors que l est $\boxed{\text{attractif}}$

Exemple : on considère la suite arithmético-géométrique : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 1) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

Quelles sont les conditions sur a et b pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

On a vu que si $a \neq 1$ il existe un unique point fixe :

$$f(\ell) = \ell \iff a\ell + b = \ell$$
$$\iff a\ell - \ell = -b$$
$$\iff \ell(a-1) = -b$$
$$\iff \boxed{\ell = \frac{-b}{a-1}} \quad , a \neq 1$$

On pose $f : x \mapsto ax+b$ que vaut $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$?

$f(x) = ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = a$

indépendant de x

$\boxed{\ell \text{ est ATTRACTIF}} \iff \max_{x \in I} |f'(x)| < 1$ or $|f'(x)| = |a|$ et $\max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = |a|$

$\iff |a| < 1$

a = pente de $\iff \boxed{-1 < a < 1}$

pente de
la droite $y = ax + b$

si la pente de la droite est comprise entre -1 et 1
ℓ est attractif

sinon ℓ est repulsif

Question : que se passe-t-il si on n'arrive pas à appliquer le théorème précédent mais qu'on arrive quand même à calculer les points fixes ?
Comment savoir si ces points fixes sont attractifs ou répulsifs ?

La réponse est donné dans ce dernier théorème :

Théorème : <u>théorème des points fixes attractifs et répulsifs</u>

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $I \subset D_f$

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$

On suppose ① f continue et dérivable sur I

② que l'on peut calculer la valeur exacte des points fixes $\ell \in I$

Alors

ⓐ $\boxed{\text{si } |f'(\ell)| < 1}$ alors ℓ est attractif

ⓑ $\boxed{\text{si } |f'(\ell)| > 1}$ " ℓ est répulsif

ⓒ $\boxed{\text{si } f'(\ell) = 1}$ alors il faut calculer $f''(\ell)$

ⓘ si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est (REPULSIF) (INSTABLE)

ⓘⓘ si $f''(\ell) = 0$ alors on calcule $f'''(\ell)$

- si $f'''(\ell) > 0$: ℓ est REPULSIF
- < 0 : ℓ est ATTRACTIF
- $= 0$ on calcule $f''''(\ell)$...

ⓓ $\boxed{\text{si } f'(\ell)=-1}$ on calcule

$-2f'''(\ell)-3\left(f''(\ell)\right)^2$ si <0 ℓ est ATTRACTIF

>0 ℓ est REPULSIF

$=0$ on continue à explorer.

$=0$ on calcule $f''''(\ell)$...

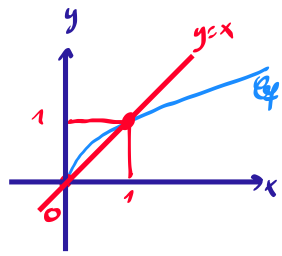
on continue à explorer

Exercice : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_n} \\ u_0 \text{ donné et } u_0\geq 0\end{cases}$$

① Calculer les points fixes ?

② sont-ils attractifs ou répulsifs ?



① Les points fixes vérifient $f(\ell)=\ell$ avec ici $f: x\mapsto\sqrt{x}$

donc $f(\ell)=\ell \iff \sqrt{\ell}=\ell$ avec $\ell\geq 0$

$\iff \ell=\ell^2$

$\iff \ell^2-\ell=0$

$\iff \ell(1-\ell)=0 \iff \ell=0$ ou $\boxed{\ell=1}$

② $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. pour $\boxed{\ell=1}$ $f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ donc $|f'(1)|=\frac{1}{2}<1$: donc $\boxed{\ell=1}$ attractif

on ne peut pas diviser par 0

. pour $\boxed{\ell=0}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty>1$: $\ell=0$ REPULSIF