

9 février 2023

Introduction aux suites

I Définition générale

Définition: On appelle suite toute fonction $\overset{\text{entiers naturels}}{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto u_n$

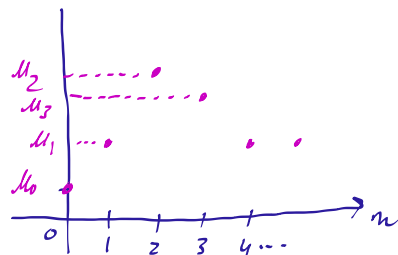
Le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Attention: ne pas confondre u_n : nombre

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: suite (fonction)

NE PAS ÉCRIRE ALORS u_n est ~~croissante~~ mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Représentation



Il existe deux façons de décrire les suites :

1. FORMULATION EXPLICITE : $u_n = f(n)$
2. FORMULATION PAR RÉCURRENCE :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Avantage majeur de la formulation explicite : $u_{500} = f(500) \rightarrow$ résultat immédiat
alors que pour la formulation par récurrence pour avoir u_{500} il faut connaître u_{499}
et pour avoir u_{499} il faut connaître $u_{498} \dots$

Différences entre formulation explicite et formulation par récurrence

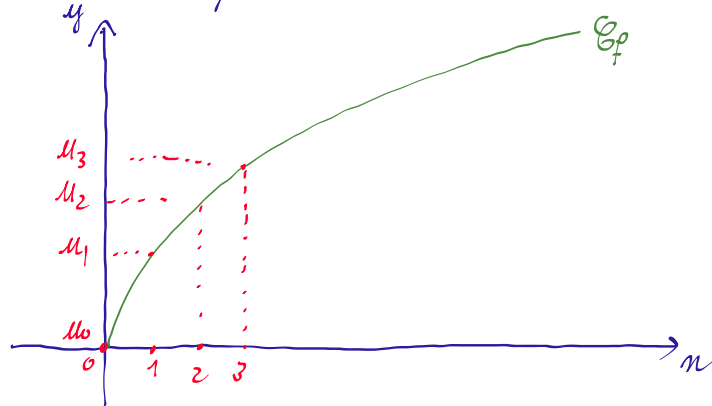
Exemple : ① On considère $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n)$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$ (comme $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ existe toujours donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie)

Comment la représente-t-on ?

Comment la représente-t-on?



② On considère $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

② On considère $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

Est-ce que cette suite est bien définie?

On va montrer par récurrence que $P_n = \underline{u_n \geq 0}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

① Initialisation: $P_0: u_0 = 4 \geq 0$ vraie

② Hérité: On suppose P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$
montrons que P_{k+1} est vraie

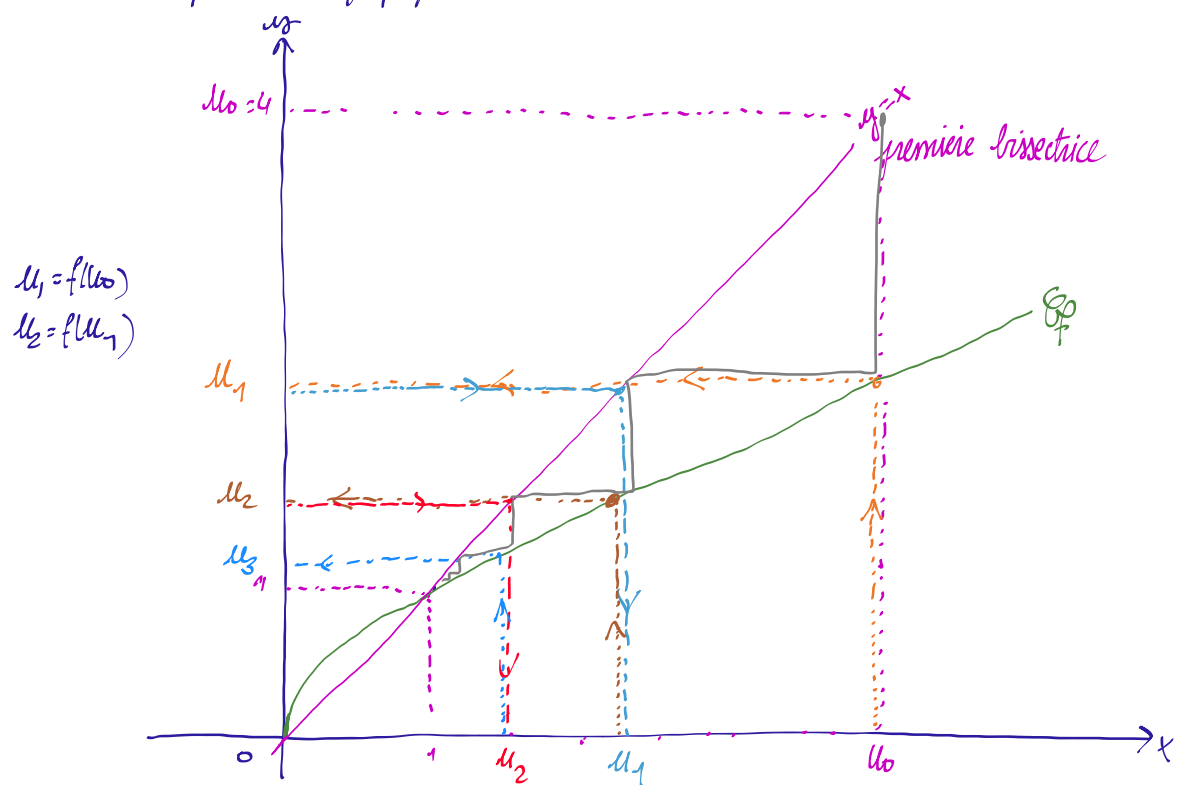
comme P_k est vraie par hypothèse de récurrence on a $u_k \geq 0$.

et donc $u_{k+1} = \sqrt{u_k}$ existe, et comme c'est une racine $u_{k+1} \geq 0$

donc P_{k+1} est vraie

③ Conclusion: P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
et ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Représentation graphique



II Trois suites classiques

a. suite arithmétique

Définition : On appelle suite arithmétique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un réel a appelé RAISON tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

exemple : $u_0 = 2$ et $a = 3$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Calculons les premiers termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

$$u_0 = u_0$$

$$u_1 = u_0 + a$$

$$u_2 = u_1 + a = u_0 + 2a$$

$$u_3 = u_2 + a = u_0 + 3a$$

$\vdots$

$$u_n = u_0 + na$$

Remarque : ce résultat est général quand $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ on peut la définir de façon explicite par $\boxed{u_n = u_0 + na}$, $n \in \mathbb{N}$

put la définir de façon explicite par _____ ,
Preuve : en exercice - par récurrence

Question : que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$\begin{aligned} u_0 &: u_0 \\ + u_1 &: u_0 + a \\ + u_2 &: u_0 + 2a \\ &\vdots \\ + u_n &: u_0 + na \end{aligned}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + a + 2a + 3a + \dots + na$$

$$= (n+1)u_0 + a (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\text{vaut } 1 + 2 + 3 + \dots + n ?$$

$$= (n+1)u_0 + a(1+2+3+\dots+n)$$

que vaut $1+2+3+\dots+n$?



GAUSS

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$+ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{donc } u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + a \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1) \left(u_0 + \frac{a \cdot n}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{2u_0 + an}{2} \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{u_0 + \boxed{u_0 + an}}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

6. suites géométriques

Definition : On appelle suite géométrique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé RAZON tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r \cdot u_n \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

Exemple : $u_0 = 2 \quad r = 3$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Formulation explicite de cette suite :

on a $u_0 = u_0$

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 u_0$$

$$u_3 = r \cdot u_2 = r^3 u_0$$

$\vdots$

$$\boxed{u_n} = r \cdot u_{n-1} = \boxed{r^n u_0}$$

Remarque: toute suite géométrique définie par $\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

peut s'écrire sous la formulation explicite $u_n = r^n u_0$

Que vaut $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$?

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ + u_1 &= r u_0 \\ + u_2 &= r^2 u_0 \\ &\vdots \\ + u_n &= r^n u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= u_0 + r u_0 + r^2 u_0 + \dots + r^n u_0 \\ &= u_0 (1 + r + r^2 + \dots + r^n) \end{aligned}$$

que vaut $1 + r + r^2 + \dots + r^n$

Astuce $\textcircled{P}$ $(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r)$

$$\begin{aligned} &= 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^n} \\ &\quad - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \cancel{r^3} - \dots - \cancel{r^n} - r^{n+1} \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

Autrement dit $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \rightarrow \neq 0 \text{ car } r \neq 1$

On a alors

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right)$$

si $r=1$

$$u_n = 1^n u_0 = u_0$$

$u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_n$
(u_n)_{n ∈ ℕ} est STATIONNAIRE

ici on suppose $r \neq 1$

c. suite arithmético - géométrique

Définition: on appelle suite arithmético géométrique, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe 2 réels r et a (appelés raison) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Remarque: si $r=1$: on a $u_{n+1} = u_n + a$: c'est une suite arithmétique (voir a))
si $a=0$ on a $u_{n+1} = r u_n$ " " géométrique (voir b))

On suppose dans ce qui suit que $r \neq 1$ et $a \neq 0$

Question: peut-on trouver une formulation explicite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Réponse: oui

Méthode : étape 1: on cherche une constante réelle l t.q. $rxl + a = l$

(remarque: on a: $u_{n+1} = ru_n + a$)

si on pose $f(x) = rx + a$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$

et chercher l tel que $rxl + a = l$

c'est " l " " $\boxed{f(l) = l}$

cherchons l : $rxl + a = l$

$$\Leftrightarrow rxl - l = -a$$

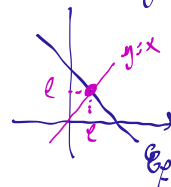
$$\Leftrightarrow l(r-1) = -a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \frac{-a}{r-1}} \quad (\text{avec } r \neq 1)$$

$f(x)$: 'droite'

$f(x) = x$: intersection de $\mathbb{E}_r$

avec $y=x$



étape 2: On pose $v_n = u_n - l$ ^{donc} $v_0 = u_0 - l$

dans ce cas là

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l$$

$$\text{or } u_{n+1} = ru_n + a$$

$$= r \cdot u_n + a - l$$

$$\text{or } v_n = u_n - l \text{ donc } u_n = v_n + l$$

$$= r \cdot (v_n + l) + a - l$$

$$= rv_n + rl + a - l$$

$$= rv_n + l(r-1) + a \quad \text{or } l = \frac{-a}{r-1}$$

$$= rv_n - \frac{a}{r-1} + a$$

$$\boxed{v_{n+1}} = rv_n - a + a = \boxed{rv_n} \quad \text{donc } (v_n) \text{ est géométrique de raison } r$$

et d'après le b) on a $v_n = v_0 r^n$
 $u_n - l = (u_0 - l) \cdot r^n$

b)

$$u_{n+1} = (u_0 - l) \cdot r^n$$

Conclusion $u_n = (u_0 - l) r^n + l$ avec $l = -\frac{a}{r-1}$

ici $u_n = \left(u_0 + \frac{a}{r-1}\right) r^n - \frac{a}{r-1}$ formulation explicite

exercice : donner la formulation explicite de $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

étape 1: On pose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de telle sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$
 $x \mapsto 2x+3$

Cherchons le point fixe de f c'est à dire

un $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$
 autrement dit $2\ell+3 = \ell$

$$\Leftrightarrow \ell+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = -3}$$

étape 2: On pose $v_n = u_n - \ell$
 $v_0 = u_0 - \ell$

avec $\ell = -3$ ça donne $v_n = u_n + 3$
 $v_0 = 1 + 3 = 4$

$$v_n = u_n + 3 \text{ donc } \boxed{u_n = v_n - 3}$$

$$\text{et } u_{n+1} = 2u_n + 3$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} - 3 = 2(v_n - 3) + 3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_{n+1}} = 2v_n - \cancel{6} + \cancel{6} = \boxed{2v_n}$$

On reconnaît une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $v_0 = 4$

étape 3: la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut donc s'exprimer sous formulation explicite:

$$v_n = v_0 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n = 2^2 \cdot 2^n = 2^{n+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

étape 4: comme $u_n = v_n - 3$ on a $\boxed{u_n = 2^{n+2} - 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

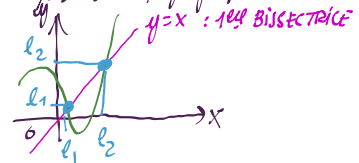
Calculer u_{10} : $u_{10} = 2^{12} - 3$

Rappel : point fixe.

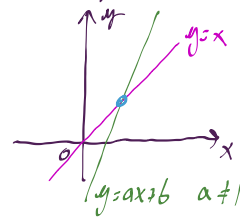
un point fixe pour f est une valeur ℓ t.q.

$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$

Représentation graphique



Quand f est une droite



III Suites récurrentes : généralités

Question: comment étudier une suite récurrente de façon générale?

C'est à dire une suite de la forme

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & , n \in \mathbb{N} \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases} \quad \text{avec } f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le but est de savoir ① si la suite est bien définie c'est à dire que
pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_f$

② est-ce que $\lim u_n$ existe?

② est-ce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe?

Exemple : dans l'exercice précédent $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

On a trouvé $u_n = 2^{n+2} - 3$

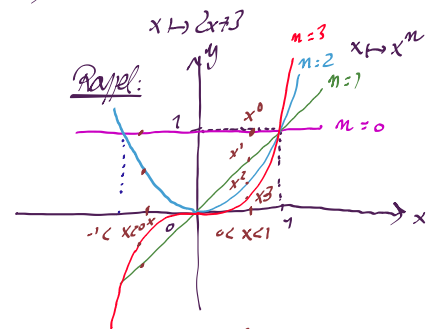
$$= 2^2 \cdot 2^n - 3$$

$$= 4 \cdot 2^n - 3$$

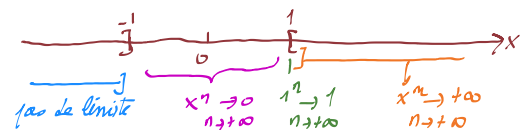
$\downarrow n \rightarrow +\infty$

$+\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



- si $-1 < x < 1$ $x^n \rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$
- si $x = 1$ $1^n \rightarrow 1$
 $n \rightarrow +\infty$
- si $x > 1$ $x^n \rightarrow +\infty$
- si $x = -1$ $(-1)^n$ n'a pas de limite ($\in \{-1, 1\}$)
si n impair
- si $x < -1$ x^n n'a pas de limite



Proposition : si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I
 et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l (c.a.d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$)
 alors l vérifie $l = f(l)$ (c.a.d. que l est un point fixe de f)

Pourquoi :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

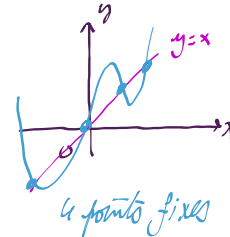
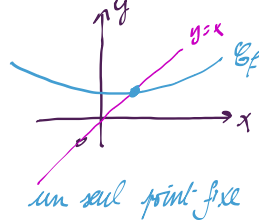
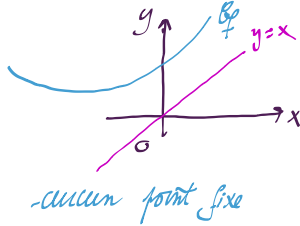
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$$

$$\underbrace{\quad}_{l} = \underbrace{f}_{f \text{ continue}}(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(l)$$

Remarque : l'exercice nouvelle : toutes les fonctions classiques $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$,
 etc... sont continues sur leur ensemble de définition. $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$

De même, la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues
 sont continues

Attention: f peut avoir 0, 1, 2 ou plusieurs points fixes



Plusieurs questions vont donc se poser:

- ① Combien la fonction f possède-t-elle de points fixes?
- ② Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers quel point fixe converge-t-elle?
- ③ Comment savoir si la suite converge?
- ④ Représentation graphique: comment savoir si la suite est croissante, décroissante, alternée... ??



Réponse à la question 4 : On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

On suppose que tous les $u_n \in I \subset \mathbb{R}$

(a) si f est croissante sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit croissante
soit décroissante. $\rightarrow$ on calcule le signe de f'

si $u_0 < u_1$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

si $u_0 > u_1$: " " est décroissante

(b) si f est décroissante sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée

Exemple : Représenter les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par } \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 0.2 \end{cases}$$

$$\text{et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par } \begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{v_n} \\ v_0 = 3 \end{cases}$$

Réponse à la question 1 : est-il possible de savoir si l'on a un ou plusieurs points fixes pour une fonction f .

- si on peut le calculer à la main c'est mieux : ex : exercices précédents
on calcule $f(l) = l$

- sinon on a next des résultats suivants

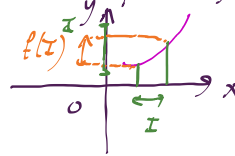
a. Stabilité d'un intervalle par une fonction

On considère $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{D}_f$ (domaine de définition de f)

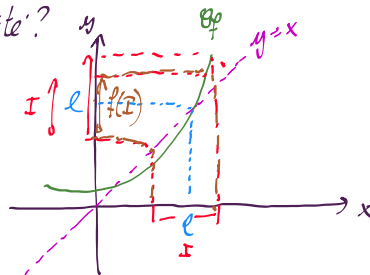
Définition : on dit que l'intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$

autrement dit : si $x \in I$, il faut montrer que $f(x) \in I$

graphiquement



Pourquoi a-t-on besoin de la stabilité?



Théorème : lorsque I est un intervalle stable par f (càd $f(I) \subset I$) avec $I \subset \mathbb{D}_f$
 alors la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(en effet, si $u_n \in I \subset \mathbb{D}_f$ (avec $u_0 \in \mathbb{D}_f$)

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I \subset \mathbb{D}_f$$

Remarque: c'est un bon moyen de montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sans
 passer par une démonstration par récurrence

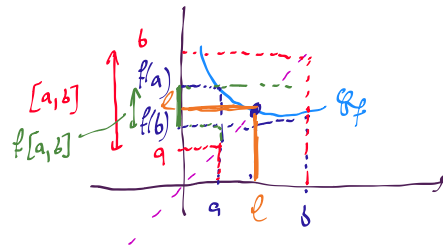
6. POINT FIXE

Définition : soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I on dit que ℓ est point fixe de f si et seulement si $f(\ell) = \ell$

Lemme : EXISTENCE DU POINT FIXE

Soient $I = [a, b]$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $[a, b] \subset \mathbb{D}_f$

On suppose que $[a, b]$ est stable par f c'est-à-dire que $f([a, b]) \subset [a, b]$
 alors f admet au moins un point fixe dans $[a, b]$



Reponse à la question 3 : comment savoir si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge?

condition nécessaire de convergence

a. Fonction strictement contractante

Définition : soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$

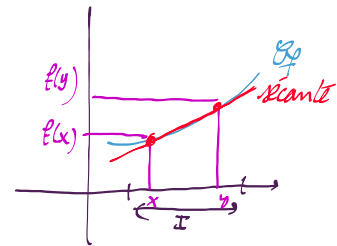
Dire que f est strictement contractante sur I signifie
 qu'il existe un k avec $0 < k < 1$ tel

qu'il existe un k avec $0 < k < 1$ tel que
 pour tous $x, y \in I$ $|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$

autrement dit: $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k < 1$

⤴
 pente de la droite
 sécante passant
 par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$

c'est-à-dire $-1 < -k < \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < k < 1$



Théorème de la fonction strictement contractante

Théorème de la fonction strictement contractante

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$ et f dérivable sur I

si f' vérifie $\max_{x \in I} |f'(x)| = K < 1$ alors f est strictement contractante

Exemple: Est-ce que $f: x \mapsto x^2$ est strictement contractante sur $[1, 2]$?

Ici $f(x) = x^2$ pour $x \in [1, 2]$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, 2]$

donc $f'(x) = 2x$ et comme $1 \leq x \leq 2$ on a $x > 0$ donc $2x > 0$

ainsi $|f'(x)| = |2x| = 2x$ de $\dagger$, $1 \leq x \leq 2$
donc $2 \leq 2x \leq 4$

Par conséquent $\max_{x \in [1, 2]} |f'(x)| = 4 > 1$ donc f n'est pas strictement contractante sur $[1, 2]$.

Théorème du point fixe:

Soit $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$ telle que

existence $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est continue sur } I \\ \textcircled{2} I \text{ est stable par } f \quad (f(I) \subset I) \end{array} \right.$

unicité: { ② I est stable par f ($f(I) \subset I$)
 ③ f est strictement contractante sur I (càd $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$)
 alors f admet un unique point fixe l et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$
 converge vers l

Question: que se passe-t-il si on n'arrive pas à appliquer ce théorème, mais
 qu'on arrive quand même à montrer que f admet plusieurs points fixes?
 Comment savoir si ces points fixes sont attractifs (càd que si u_0 n'est pas loin de
 ce point $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point) ou répulsifs (—————
 — alors — ne converge pas —)
 Ça se trouve est dans le théorème suivant

Théorème: POINTS ATTRACTIFS - POINTS RÉPULSIFS

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{D}_f$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

$$\text{définie par } \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

on suppose f continue et dérivable sur I

On " que l'on a calculé la valeur exacte d'un point fixe ℓ

alors ① si $|f'(\ell)| < 1$: alors ℓ est ATTRACTIF $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si u_0 proche de ℓ

② si $|f'(\ell)| > 1$: " " REPULSIF

③ si $f'(\ell) = 1$ alors on calcule f'' (si f est 2 fois dérivable sur I)

a) si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est REPULSIF

b) si $f''(\ell) = 0$ alors si $f'''(\ell) > 0$ alors ℓ est REPULSIF
si $f'''(\ell) < 0$ " ℓ est ATTRACTIF

④ si $f'(\ell) = -1$ on calcule:

$$-2f'''(\ell) - 3(f''(\ell))^2 \quad \text{si } < 0 \quad \ell \text{ est ATTRACTIF}$$

$$\text{si } > 0 \quad \ell \text{ est REPULSIF}$$

Exemple : examen licence SPS 14 décembre 2021

Soit $f: x \mapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

$\mathbb{R}$ privé de

① $D_f = ?$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; x-5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

② Expliquer pourquoi f est continue sur D_f

sur $]-\infty, 5[$ ou $]5, +\infty[$ f est continue comme quotient et addition de fonctions continues
($x \mapsto x+2$, $x \mapsto x-5$ et $x \mapsto 1$)

③ On suppose $x \in [0, 1]$

a. Montrer que $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$

b. Expliquer pourquoi f est décroissante sur $[0, 1]$

c. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et en déduire que $[0, 1]$ est stable par f

a. $f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$ donc $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-5) - (x+2) \cdot 1}{(x-5)^2} + 0$
 $= \frac{x-5-x-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

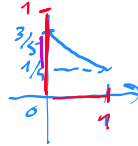
$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$(x-5)^2 \quad (\overline{x-5})^2$$

b. $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ on pour tout $x \in [0,1]$: $(x-5)^2 > 0$ et $-7 < 0$ donc $f'(x) < 0$

Pour conséquent f est décroissante sur $[0,1]$

c. $f(0) = \frac{0+2}{0-5} + 1 = \frac{-2}{5} + 1 = \frac{-2+5}{5} = \frac{3}{5}$

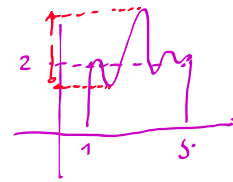


$$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = \frac{-3}{4} + 1 = \frac{-3+4}{4} = \frac{1}{4}$$

Soit $f([0,1]) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{5}] \subset [0,1]$ (car $\frac{1}{4} > 0$ et $\frac{3}{5} < 1$)

donc $[0,1]$ est stable par f

d. Montrer que $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3}$



e. Montrer que f' est décroissante sur $[0,1]$

f. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$

g. Montrer que f est strictement contractante sur $[0,1]$

d. Rappel: $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2} = \frac{0+7 \cdot 2 \cdot (x-5) \cdot 1}{(x-5)^4}$
 $= \frac{14(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14}{(x-5)^3}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^2)' = 2u \cdot u'$$

e. sur $[0,1]$ $14 > 0$

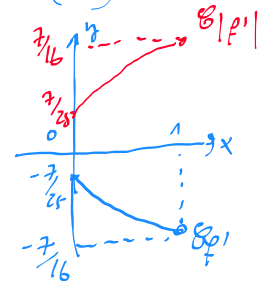
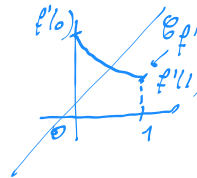
et $0 \leq x \leq 1$ donc $-5 \leq x-5 \leq 1-5 = -4 < 0$ donc $x-5 < 0$ donc $(x-5)^3 < 0$

par conséquent $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3} < 0$ sur $[0,1]$

Ainsi f' est décroissante sur $[0,1]$

$$f'(0) = \frac{-7}{(0-5)^2} = \frac{-7}{25}$$

$$f'(1) = \frac{-7}{(1-5)^2} = \frac{-7}{(-4)^2} = \frac{-7}{16}$$



donc $\max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \frac{7}{16} < 1$ donc f est strictement contractante.

On a: ① f continue sur $[0,1]$
 ② $[0,1]$ stable par f
 ③ f strict. contractante sur $[0,1]$

} donc il existe un unique point fixe $\ell \in [0,1]$

Cherchons ce point fixe: $\ell \in [0,1]$ t.q. $f(\ell) = \ell$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell+2}{\ell-5} + 1 = \ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell+2}{\ell-5} = \ell-1$$

$$\Leftrightarrow \ell+2 = (\ell-1)(\ell-5)$$

$$\Leftrightarrow \ell+2 = \ell^2 - 5\ell - \ell + 5$$

$$\Leftrightarrow \ell+2 = \ell^2 - 6\ell + 5$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - 7\ell + 3 = 0 \quad \Delta = 49 - 4 \cdot 3$$

$$= 49 - 12$$

$$= 37$$

$$\ell_1 = \frac{7 - \sqrt{37}}{2} \quad \ell_2 = \frac{7 + \sqrt{37}}{2} > 1$$

$$\ell \in [0,1]$$

$$\underbrace{\quad}_{0 < \quad < 1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

