## Théorème de Poincaré - Bendixson

en dim 2 !!

On considère le système $\frac{dX}{dt} = F(X)$ (1) avec $X \in \mathbb{R}^2$, $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $F \in \mathcal{C}^1(D)$.

Alors toute trajectoire bornée de (1) converge

(i) soit vers 1 équilibre

(ii) " " 1 cycle limite

(iii) soit vers une réunion de points selle reliés par des trajectoires homoclines ou hétéroclines

Idée de la preuve :

Quand $F \in \mathcal{C}^1$ ($F$ champ de vitesse), on peut localement le "redresser" (théorème de redressement du flot)

Alors si une trajectoire repasse assez près d'un point où elle est déjà passée on a :

 ou 

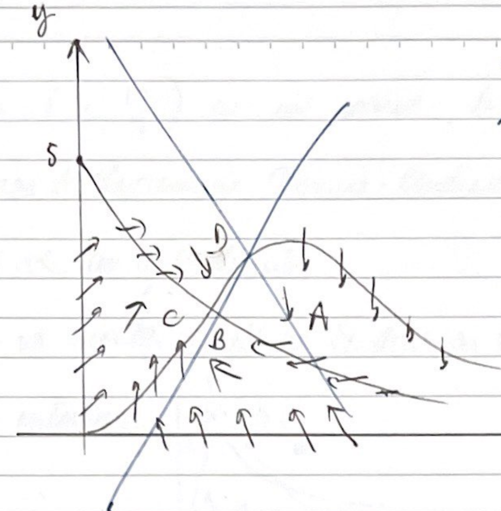
Mais alors la trajectoire est "attrapée" et va se caler soit sur un cycle soit sur un équilibre par monotonie ↗ majorée ou ↘ minorée

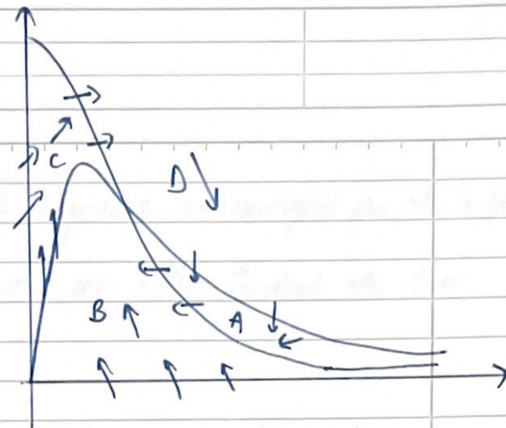
Exemple d'utilisation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \frac{1}{10}y + x^2y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}y - x^2y \end{cases}$$

Isoclines -0 . $y(\frac{1}{10} + x^2) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{1/10 + x^2}$

$y(\frac{1}{10} + x^2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1/2}{1/10 + x^2}$




equlibre : $y = \frac{x}{1/10 + x^2} = \frac{1/2}{1/10+x^2}$ donc $x = 1/2$ et $y = \frac{1/2}{1/10+1/4} = \frac{10}{7}$

Les vitesses semblent "tourner" autour de l'equlibre

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1+2xy & 1/10 + x^2 \\ -2xy & -(\frac{1}{10}+x^2) \end{pmatrix}$$

$$J\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{10}{7}\right) = \begin{pmatrix} 3/7 & 7/20 \\ -10/7 & -7/20 \end{pmatrix}$$ val. props : $(3/7 - \lambda)(-7/20 - \lambda) + \frac{1}{2}$

$= -\frac{3}{20} - \frac{3}{7}\lambda + \frac{7}{20}\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{2}$

$= \lambda^2 - \frac{11}{140}\lambda + \frac{7}{20}$

$$\Delta = \left(\frac{11}{140}\right)^2 - 4\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{121}{140^2} - \frac{7}{5} < 0$$

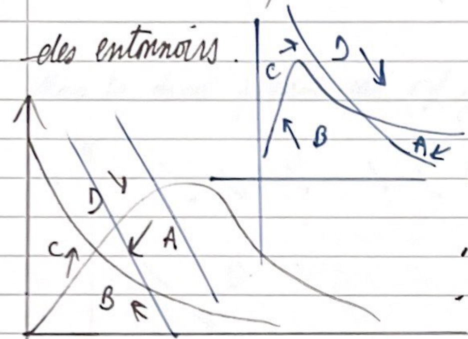
Racines $\frac{11}{40} \pm i\sqrt{-\Delta}$ spiral instable

Donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{7}\right)$ est une source, les trajectoires ne convergent pas vers le point

D'après le théorème de Poincaré-Bendixson soit elles tendent vers l'$\infty$

soit vers un cycle limite.

On va montrer qu'elles ne tendent pas vers l'$\infty$ en construisant des entonnoirs.




On voit que pour une condition initiale

. dans A : la trajectoire passe forcément dans B

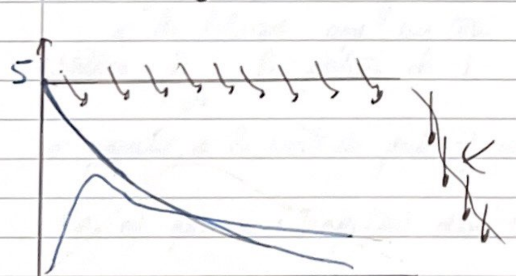
. dans B : _________________ C

. — C : D

Pour une condition initiale dans D, on cherche à construire un entonnoir poussant les trajectoires dans A.

On peut facilement construire un entonnoir (ou "une barrière") bloquant y : une droite horizontale passant par $(x_0, y_0)$ convient

la condition initiale




il reste à construire un entonnoir bloquant x

Pour ça on cherche à construire une droite de pente négative t.q. les flèches pointent vers le dessous.

Donc, la pente de la droite doit être supérieure à celle des flèches.

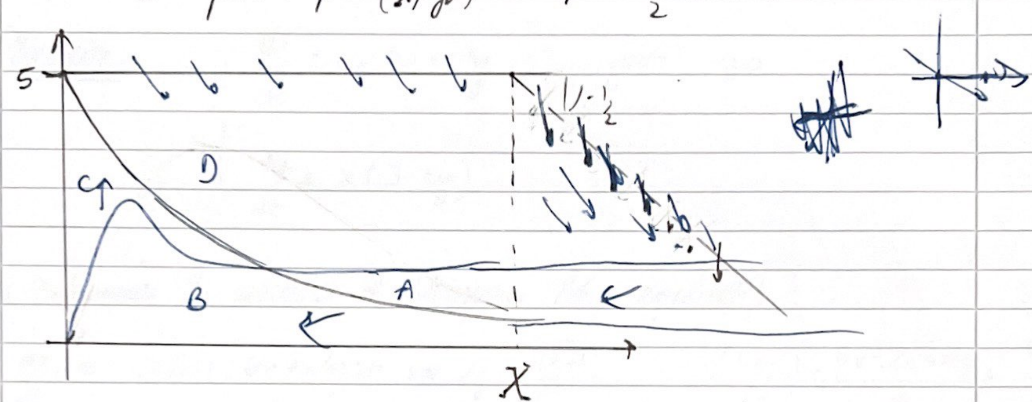
(pour rentrer dans D)

Or en chaque point $\binom{x}{y}$ la flèche représente le vecteur $\begin{pmatrix} -x+\frac{1}{10}y+x^2y \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{10}y-x^2y \end{pmatrix}$

dont la pente est $\dfrac{1/2 - y/10 - x^2y}{-x+y/10+x^2y} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$

Donc $\exists X > 0$ t.q. pour tout $x \geq X$ $\dfrac{1/2 - y/10 - x^2y}{-x+y/10+x^2y} < -\frac{1}{2}$

Alors la droite passant par $(X, y_0)$ et de pente $-\frac{1}{2}$ convient




Donc les trajectoires qui partent dans D passent forcément dans A.

Est-ce que toutes les trajectoires sont donc bornées ? Est-ce qu'on arrive à les bloquer après un tour ? ou est-ce qu'elles font

Notons $D_{y_0^*}$ la portion de D située en dessous de la droite $y = y_0$ et à gauche de la droite de pente $-\frac{1}{2}$ passant par $(X, y_0)$. $(y_0 = 5)$

Alors a) pour une trajectoire dont la condition initiale est dans D avec $y_0 < 5$ on a la trajectoire qui reste dans $D_5$ toute le temps

b) pour une trajectoire démarrant dans D avec $y_0 \geq 5$, alors la trajectoire reste dans $D_{y_0}$ pour tout temps (parce qu'après un tour elle se retrouve dans $D_5$ et $5 < y_0$)

Donc toutes les trajectoires de ce système sont bornées

Le seul equilibre est instable (dans toutes les directions) donc

d'après le theoreme de Poincaré-Bendixson, il y a forcement un ou plusieurs

cycles autour de l'equilibre et toute trajectoire est attirée vers un de ces

cycles.