INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles
et modélisation

Contrôle Partiel Ecrit- EDO
22 octobre 2015

Avant propos.

La durée du partiel est de 1h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone ne sera autorisé durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Question de cours (20 minutes) (5 points)

1. (2 points) Enoncer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation intégrale.
2. (3 points) Démontrer ce lemme.

Exercice 1 (20 minutes) (9 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \;\; e^{x^2(t)}x'(t) = e^{x^2(t)} - 1, \quad \text{pour } t \in I \subset \mathbb{R}.$$

1. (1 point) Dire si cette équation différentielle est linéaire ou non, autonome ou non et donner son ordre (justifier).
2. (1 point) Écrire l'équation (E_1) sous forme normale.
3. (1 points) Pour une condition initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ donnée avec $t_0 \in I$, a-t-on existence et unicité de la solution ? Justifier.
4. (2 points) Trouver le ou les équilibres de (E_1). Justifier le résultat.
5. (2 points) Étudier leur stabilité.
6. (2 points) Tracer des trajectoires significatives avec soin.

Exercice 2 (20 minutes) (7 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_2)\ \ tx'(t) + x(t) = t^2x^2(t)\ \ \text{avec}\ \ x(t_0) = x_0,\quad \text{pour } t, t_0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ et }\quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. (1 point) Dire si cette équation différentielle (E_2) est linéaire ou non, autonome ou non et donner son ordre (justifier).
2. (1 point) Écrire l'équation (E_2) sous forme normale en donnant les intervalles pour t et t_0 sur lesquels elle sera bien définie.
3. (1 point) Reconnaître l'équation (E_2).
4. (4 points) On choisit $t_0 \in]0, +\infty[$ et $t \in]t_0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle précédente, et exprimer la solution en fonction de t, t_0 et x_0.
5. BONUS : (2 points) résoudre (E_2) pour la condition initiale $x(1) = 1$.

3BIM Partiel du 22 octobre 2015 Corrigé

Cours

1. GRONWALL - INÉQUATION INTÉGRALE

Soit x continue de $I=[0,T]$ sur $\mathbb{R}_+$, $T\in\mathbb{R}$ qui vérifie

$x(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)x(s)ds$ pour tout $t\in I$

où $a : I \to \mathbb{R}_+$ et $b : I \to \mathbb{R}$ continues

alors

$$x(t) \leq b(t) + \int_0^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)a(s)ds \quad , t\in[0,T]$$

2. Preuve:

On pose $y(t) = \int_0^t a(s)x(s)ds$

On a pour tout $t\in(0,T]$ $y'(t) = a(t)x(t)$ or $x(t)\leq b(t)+y(t)$ (hyp.)

donc
$$\begin{aligned} y'(t) &\leq a(t)\,(b(t)+y(t)) \\ &\leq a(t)\,y(t) + a(t)b(t) \end{aligned}$$

on se ramène au lemme de Gronwall (inéquation différentielle)

et alors $y(t) \leq \int_0^t a(s)b(s)\,e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} ds$, $t\in[0,T]$

Finalement $x(t) \leq b(t)+y(t) = b(t) + \int_0^t a(s)b(s)\,e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} ds$

Exercice 1

1. Equation . non linéaire (termes en $e^{x^2(t)}$)

. autonome

. ordre 1

2. (E_1) s'écrit $x'(t) = 1 - e^{-x^2(t)}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}$

3. Soit $f : x \mapsto 1 - e^{-x^2(t)}$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori $\mathcal{C}^1$ donc localement lipschitzienne et donc elle satisfait les hypothèse du theoreme de Cauchy-Lipschitz

Donc pour une condition initiale donnée, on a existence et unicité de la solution de (E_1).

4. Les équilibres x^* de (E_1) verifient $x^{*\prime} = 0$ càd $f(x^*) = 0$

or $f(x^*) = 0 \iff 1 = e^{-x^{*2}}$

$\iff -x^{*2} = \ln(1) = 0$

$\iff x^* = 0$

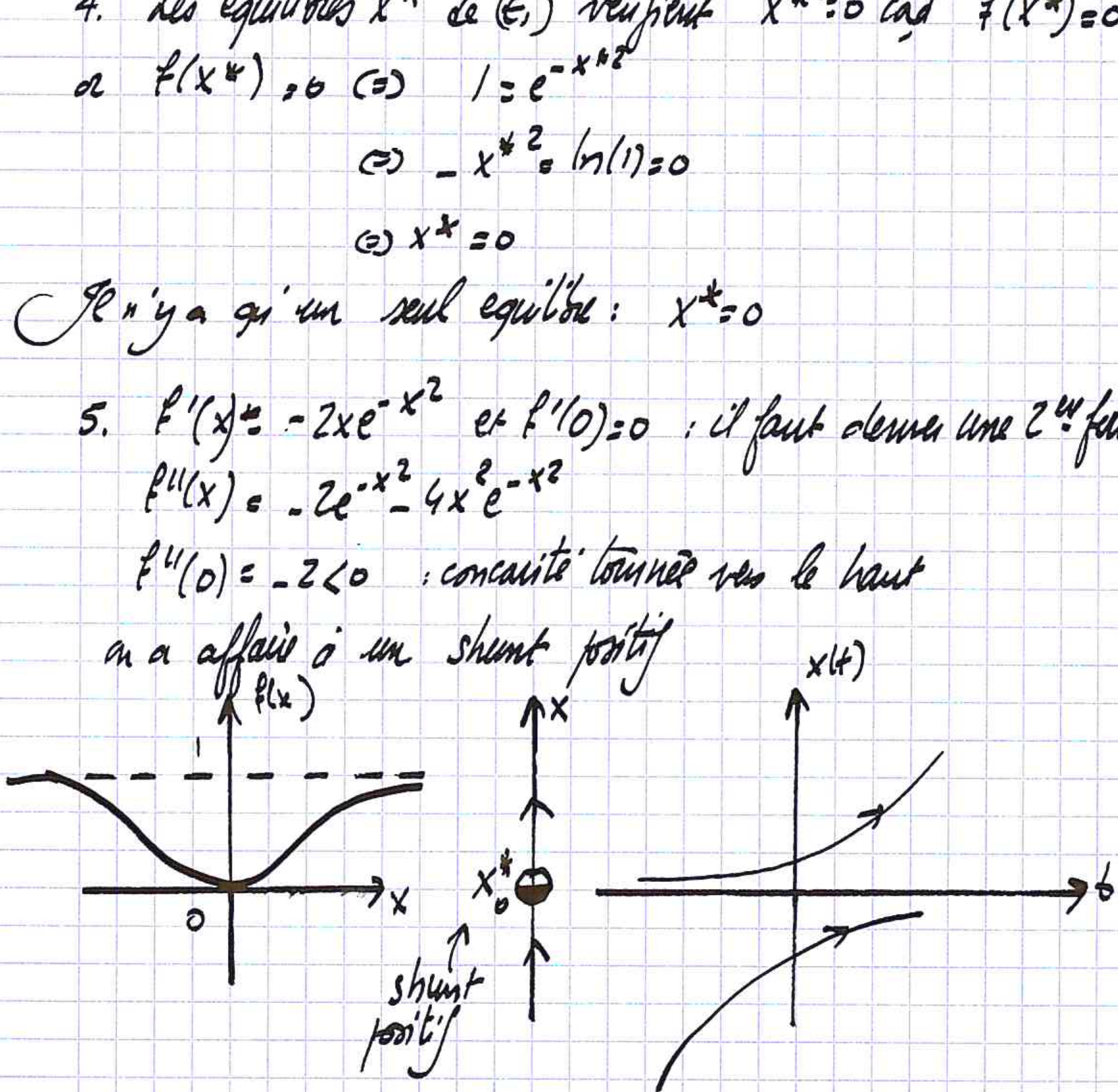
Il n'y a qu'un seul equilibre : $x^* = 0$

5. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f'(0) = 0$: il faut deriver une 2ème fois

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$

$f''(0) = -2 < 0$: concavité tournée vers le haut

on a affaire à un shunt positif



Exercice 2

1. EDO non linéaire (terme x^2)

non autonome (t explicite)

ordre 1

2. Soit $t \in]-\infty, 0[$ ou $t \in]0, +\infty[$, soient $t_0 \in]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ (resp.)

on a (E_2) qui s'écrit

$x' + \frac{1}{t}x = tx^2$ ou encore $x' + \frac{1}{t}x - t^2x^2 = 0$, $x(t_0) = x_0$

3. On reconnaît une équation de Bernoulli de la forme

$x' + p(t)x + \varphi(t)x^r = 0$ où $p(t) = \frac{1}{t}$ $\varphi(t) = -t^2$ et $r = 2$

4. Soit $t_0 \in]0, +\infty[$ et $t \in]t_0, +\infty[$

On pose $u = x^{1-r} = x^{1-2} = x^{-1}$

sous réserve que pour $t \in]t_0, +\infty[$, $x(t) \neq 0$

Alors u vérifie $u' + (1-r)p(t)u + (1-r)\varphi(t) = 0$

Autrement dit $u' - \frac{1}{t}u + t = 0$

ou encore $(*)$ $u' - \frac{1}{t}u = -t$

On multiplie chaque membre par $e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} ds} = e^{-[\ln|s|]_{t_0}^{t}}$

or $t > 0 \Rightarrow |t| = t$ $\Rightarrow$ " $= e^{-\ln t + \ln t_0} = \frac{t_0}{t}$

Puis on intègre chaque membre de $(*)$ entre t_0 et t:

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{t_0}{s}u(s)\right]' ds = -\int_{t_0}^{t} \frac{t_0 s}{s} ds$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_0}{t}u(t) - u(t_0) = -t_0[s]_{t_0}^{t} = -t_0[t - t_0] = -t_0t + t_0^2$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{t}{t_0}u(t_0) - \frac{t^2}{\cancel{t_0}}\cancel{t_0} + \frac{t}{\cancel{t_0}}.t_0^{\cancel{2}} =$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{t}{t_0}u(t_0) - t^2 + tt_0 = \frac{tu(t_0) - t^2t_0 + tt_0^2}{t_0}, \quad u(t_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{t_0}{t/x_0 - t^2t_0 + tt_0^2} = \frac{t_0x_0}{t[1 - tt_0x_0 + t_0^2x_0]}.$$

5. BONUS

$$x(t) = \frac{1}{2t - t^2}$$