Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques

Série 8 :
Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice I. Intégrale sur un intervalle compact de $I\!R$ (continuité)

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Nous allons le faire de deux façons.

1. **Méthode 1.** Pour tout $x \in I\!R_+^*$ et pour tout $t \in [0,1]$ on considère f la fonction définie sur $I\!R_+^* \times [0,1]$, et I la fonction définie sur $I\!R_+^*$ par

$$f(x,t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}, \text{ et } I(x) = \int_0^1 f(x,t)dt.$$

   (a) Montrer que I est continue sur $I\!R$.

   (b) Supposons $x \neq 1$, montrer que

$$f(x,t) = \frac{1}{x^2-1}.\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1}.\frac{1}{t^2+x^2},$$

   puis calculer $I(x)$ et puis $I(1)$.

   (c) En déduire la valeur de l'intégrale J.

2. **Méthode 2.** Calculer directement I en faisant le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

Exercice II. Intégrale sur un intervalle compact de $I\!R$ (dérivabilité)

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta)d\theta.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. Calculer F' sur l'intervalle $]-1,1[$. Indication : on pourra procéder au changement de variable $t = \tan(\dfrac{\theta}{2})$.
3. En déduire F sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice III. Intégrale sur un intervalle compact de $I\!R$ (dérivabilité)

On considère F définie pour tout $x \in I\!R$ par

$$f(x) = F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1 - x\cos(t))|}dt.$$

1. Vérifier que F est bien définie pour tout $x \in I\!R$ et que F est continue sur $I\!R$.
2. Montrer que F est paire.
3. Montrer que F est deux fois dérivable pour tout $x \in]-1, 1[$ et qu'elle vérifie la relation

   $$4x(x^2 - 1)F''(x) + 4(x^2 - 1)F'(x) - xF(x) = \int_0^{\pi} R(t, x)dt,$$

   où

   $$R(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin(t)}{\sqrt{1 - x\cos(t)}}\right).$$

4. En déduire que F vérifie l'équation différentielle

   $$4x(x^2 - 1)F''(x) + 4(x^2 - 1)F'(x) - xF(x) = 0.$$

Exercice IV. Intégrale sur un intervalle non compact de $I\!R$ (continuité)

1. On considère la fonction f définie pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[$ par

   $$f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}.$$

   Montrer que la fonction F définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par

   $$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}dt,$$

   est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction F définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par

   $$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt,$$

   est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice V. Intégrale sur un intervalle non compact de $I\!R$ (dérivabilité)

1. On définit pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction F par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt,$$
comme dans l'exercice précédent.
   (a) Calculer la dérivée de F en tout point non nul .
   (b) En déduire $F(x)$. Et de la continuité de F en 0 déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$
2. On introduit maintenant pour tout $x \in I\!R$ la fonction F définie par
$$F(x) = \int_O^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}.$$
   (a) Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in I\!R$ et que F est continue bornée sur $I\!R$.
   (b) Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = xG(x)$, où G est donnée par
$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2 + x^2} du.$$
   (d) Montrer que G est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer G' et G'' sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$.
   (e) En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par
$$F''(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3} \cos(u) du.$$
   (f) Montrer que pour tout $(u, x) \neq (0, 0)$ les fonction h et k définies par
$$h(u, x) \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3}, \text{ et } k(u, x) = \frac{-1}{u^2 + x^2},$$
vérifient la condition
$$h(u, x) = \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u, x).$$
   (g) En déduire que F vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $F'' = F$.
   (h) En déduire que F est de la forme
$$F(x) = ae^x + be^{-x}, \quad a, b \in I\!R, \quad x \in]0, +\infty[.$$
   (i) Calculer a et b en fonction des résultats obtenus dans les 3 premières questions et en déduire une expression de F valable pour tout $x \in I\!R$.

Exercice VI. Fonction Gamma

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $I\!R$ telle $f(0) = 1$ et $0 \leq f(t) < 1$ pour tout $t \in]0, 1]$. On note

$$g(x) = \sup_{t \in [x,1]} f(t),$$

pour $x \leq 1$.

1. Pour quelles valeurs réelles de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ existe-t-elle ?
   On note $\Gamma(1-\alpha)$ la valeur de cette intégrale généralisée si elle existe.
2. Montrer que si $x]0, 1]$, alors $g(x) < 1$.
3. Montrer que $f'(0) \leq 0$.
   Désormais on fixe un réel $\alpha \in]0, 1]$. On suppose que $f'(0) \neq 0$ et note $f'(0) = -\lambda$, avec $\lambda \in I\!R_+^*$.
4. Montrer que
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$
5. Soit $\mu > \lambda$.
   (a) Montrer à l'aide de la question 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \geq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.
   (b) En déduire que pour $\mu > \lambda$,
$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq (n\mu)^{\alpha - 1} \int_0^{n\mu x_\mu} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$
   (c) En déduire que pour tout $\mu > \lambda$
$$\liminf_{n \to +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}},$$
   puis que
$$\liminf_{n \to +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}},$$
6. On suppose maintenant que $0 < \mu < \lambda$.
   (a) Montrer à l'aide de la question 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \leq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.
   (b) En déduire que pour $0 < \mu < \lambda$,
$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq (n\mu)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) + \frac{r^n}{(x_\mu)^\alpha} (1 - x_\mu),$$
   où $r := g(x_\mu)$.

(c) En déduire que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}},$$

puis que

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}},$$

7. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}, \quad n \to +\infty.$$

Exercice VII. Transformée de Laplace

Dans tout l'exercice on note $\mathscr{L}$ la transformée de Laplace définie pour tout $t/in\mathbb{R}^+$, et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

1. Calculer $\mathscr{L}\{1\}$, $\mathscr{L}\{t\}$, $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$, $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}$.
2. Supposons f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   Calculer $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ et $\mathscr{L}\{f''(t)\}$.
3. Résoudre les deux équations différentielles suivantes
   (a) $x'(t) + 3x(t) = 13\sin(2t)$, avec $x(0) = 6$.
   (b) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-4t}$, avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 5$.

TD8. Intégrales dépendant d'un paramètre - corrigé -

Exercice 1

1. a. f est une fraction rationnelle de polynômes en x et t définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et a fortiori sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$.

b. Si $x \neq 1$ on vérifie (à faire) que $f(x,t) = \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+x^2}$

On a $I(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{t^2+x^2} \right) dt$ $\qquad x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

d'où $I(x) = \frac{1}{x^2-1} \left[\arctan(t) \right]_0^1 - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x} \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^1$

$= \frac{1}{x^2-1} \left[\arctan 1 - \arctan 0 \right] - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x} \left[\arctan \frac{1}{x} - \arctan(0) \right]$

$= \frac{1}{x^2-1} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

D'autre part $\quad I(1) = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \lim_{x \to 1} \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ $\qquad$ (théorème du cours)

c. On pose $x = 1+h$ et on développe $\quad g : h \mapsto \frac{1}{1+h} \arctan\left(\frac{1}{1+h}\right)$ autour de 0

on aura :

$\frac{1}{1+h} \arctan\left(\frac{1}{1+h}\right) = \arctan(1) - h\left(\arctan(1) + \frac{1}{2}\right) + o(h)$ $\quad$ où $\lim_{h \to 0} o(h) = 0$

$= \frac{\pi}{4} - h\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + o(h)$

Et $\quad I(1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2+h} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - h\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + o(h) \right]$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2+h} \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + o(h) \right) = \boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$

2. Si on pose $t = \tan\theta$

$dt = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$

$t = 0 \Rightarrow \theta = \arctan(0) = 0$

$t = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

enfin, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

d'où $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$

Exercice 2 :

1. On pose $f : [-\pi,\pi]\times]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$(\theta, x) \mapsto f(\theta,x) = \ln(1+x^2-2x\cos\theta)d\theta$$

La fonction de 2 variables f est continue sur le rectangle $[-\pi,\pi]\times]-1,1[$ car le terme $1+x^2-2x\cos\theta$ est >0 et ne s'annule pas sur ce domaine.

De plus, $\frac{\partial}{\partial x} f(\theta,x) = \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}$ et $(\theta,x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\theta,x)$ est continue sur le domaine

Donc F est dérivable sur $]-1,1[$

2. On a $F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial x} f(\theta,x)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta} d\theta$

Par le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $\theta = 2\arctan(t)$

$$d\theta = 2 . \frac{1}{1+t^2} dt$$

on rappelle que $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et enfin si $\theta = -\pi$ $t=-\infty$
$\theta = \pi$ $t = +\infty$

On a $F'(x) = 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+x^2-2x\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2(x+1)+(x-1)}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)} \frac{t^2(x+1)^2+(x-1)(x+1)}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{\left(t^2(x+1)^2+(x-1)^2\right)(1+x^2)}\right) dt$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x} \cdot \frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{(x-1)}{2x} \cdot \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{4\pi}{x+1} \left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{(1+x)}{(1-x)} - \frac{(x-1)}{2x}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{(x+1)} \left(1 - \frac{(x+1)}{2x} - \frac{(x-1)}{2x}\right)$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$

Par continuité, on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

3. Etant donné que $F(x) = 0$ sur $]-1,1[$ on a $F(x) = c^{te} = F(0) = 0$.

Exercice 3

1. On pose $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos(t)|}$. φ est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ donc intégrable pour $t\in[0,\pi]$ et par le théorème du cours F est continue sur $\mathbb{R}$

2. $F(-x) = ?$ On pose $u = \pi - t$

$$F(-x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1+x\cos(t)|}\,dt = -\int_{\pi}^{0} \sqrt{|1-x\cos u|}\,du = \int_0^{\pi} \sqrt{|1-x\cos(u)|}\,du = F(x)$$

3. φ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0,\pi]\times]-1,1[$

on a $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) = \dfrac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) = \dfrac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{3/2}}$

Donc F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{\pi} \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\,dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^{\pi} \frac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{3/2}}\,dt$$

On peut donc calculer

$$4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x)$$

$$= \frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\cdot\left(-x(x^2-1)\cos^2 t - (x^2-1)\cos t(1-x\cos t) - x(1-x\cos t)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x\cos t)^{3/2}}\left(-x(\cos^2 t+1)+2\cos t\right)$$

or, on vérifie que $R(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right) = \dfrac{2\cos t(1-x\cos t) - \sin^2 t}{(1-x\cos t)^{3/2}} = \dfrac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{3/2}}$

D'où l'égalité $4x(x^2-1)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x)$

ce qui en intégrant entre 0 et π sur t, nous donne l'égalité cherchée

4. Comme $\displaystyle\int_0^{\pi} R(t,x)\,dt = \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\right]_0^{\pi} = 0$ donc F vérifie bien l'équation différentielle.

Exercice IV =

1. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et pour tout $(x,t)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ $\quad |f(x,t)|\leq \frac{1}{1+t^2}$

or $t\mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$

donc la fonction $F: x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est continue sur $[0,+\infty[$

2. . Soit $x_0>0$. fixé

Soit α t.q. $0<\alpha<x_0$. Pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$ on a la majoration

$|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}|\leq e^{-\alpha t}$ car $|\sin t|\leq t$ pour tout $t\geq 0$

Donc sur $[\alpha,\infty[\times[0,+\infty[$ $\quad f:(x,t)\to \frac{\sin t}{t}e^{-xt}$ est continue et dominée par une fonction intégrable

Donc F est continue sur $[\alpha,+\infty[$ pour tout $\alpha>0$ donc F continue sur $]0,+\infty[$

. En 0 ?

Le raisonnement précédent ne s'applique plus. Il faut prouver la convergence uniforme

On va donc montrer que, si on fixe $\alpha>0$, pour tout $\varepsilon>0$, $\exists T>0$ t.q.

pour tout $x\in[0,\alpha[$ $\quad |\int_T^{\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt|<\varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$ et T t.q. $\frac{2}{T}<\varepsilon$. La fonction $t\mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$ est décroissante >0 sur $[0,+\infty[$

donc On utilise la seconde formule de la moyenne (à rappeler) et écrire

pour tout $S>T$, il existe ξ t.q. $T<\xi<S$ et

$$\int_T^S e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{e^{-xT}}{T}\int_T^{\xi}\sin t\,dt \text{ et donc}$$

$$\left|\int_T^S e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right| = \frac{e^{-xT}}{T}|\cos T-\cos\xi|\leq\frac{2}{T}<\varepsilon$$

l'intégrale converge donc uniformément sur $[0,\alpha]$

On en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{x\to 0}\int_0^{\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$$

Exercice V

1 a. f est intégrable sur $[0,+\infty[$ (voir exercice précédent)

D'autre part $(x,t)\mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right) = -e^{-xt}\sin t$ est continue sur $[\alpha,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ $\alpha>0$

et $\left|\frac{\partial}{\partial x} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right| \leq e^{-\alpha t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

On en déduit que F est dérivable sur $[\alpha,+\infty[$ et $F'(x) = -\int_0^{\infty} e^{-xt}\sin t\,dt$, $\alpha>0$

b. En intégrant 2 fois par parties on trouve que $F'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$, $x\in[\alpha,+\infty[$ $\alpha>0$

On en déduit que $F(x) = -\arctan(x) + c^{te}$

Comme $F(x) \leq \int_0^{\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$ on a $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ et on trouve $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

Puisque $F(0) = \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$, la continuité en 0 de F se traduit par

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

2. a. On remarque que $\left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ avec $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ qui existe

Donc F est bien définie.

De plus, comme $(x,t)\to\frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue et uniformément dominée par $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$

on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$, et $F(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(\infty) - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$

Donc F est bornée par $\frac{\pi}{2}$

b. $F(-x) = F(x)$ immédiat (car $\cos(-tx) = \cos(tx)$)

et $F(0) = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

c. On fait le changement de variables suivant : $u = xt$

$$F(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos u}{1+\left(\frac{u}{x^2}\right)}\frac{du}{x} = x\int_0^{\infty}\frac{\cos u}{x^2+u^2}du = x\,G(x)$$

d) On calcule d'alors $\frac{\partial g}{\partial x}(u,x) = \frac{-2x\cos u}{(x^2+u^2)^2}$ (on pose $g(x,u) = \frac{\cos u}{u^2+x^2}$)

C'est une fonction continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soit $a>0$. Pour $x \geq a$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| \leq \frac{2x}{(x^2+u^2)^2} \leq \frac{2x}{x^2(x^2+u^2)} = \frac{2}{x(x^2+u^2)} \leq \frac{2}{a(a^2+u^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+u^2)\left[x^2+u^2-x^2\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 \geq 0$$

Puisque $\int_0^\infty \frac{2}{a(a^2+u^2)}\,du$ converge, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre et on obtient G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et de dérivée donnée par $G'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\,du = \int_0^\infty -\frac{2x\cos u}{(x^2+u^2)^2}\,du$

De même, on calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,u) = \frac{8x^2\cos u}{(x^2+u^2)^3} - \frac{2\cos u}{(x^2+u^2)^2} = \frac{(6x^2-2u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3}$

On a $(x,u) \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

Pour $x \geq a$ on a

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,u)\right| \leq \frac{|6x^2-2u^2|}{(x^2+u^2)^3} \leq \frac{6(x^2+u^2)}{(x^2+u^2)^3} \leq \frac{6}{(a^2+u^2)^2}$$

Puisque $\int_0^\infty \frac{6}{(a^2+u^2)^2}\,du$ converge, on applique le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre qui nous montre que G' est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$

C'est à dire G de classe $\mathcal{C}^2$ et G'' donnée par

$$G''(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,u)\,du = \int_0^\infty \frac{6x^2-2u^2}{(x^2+u^2)^3}\cos u\,du$$

(e) Comme $F(x) = x\,G(x)$ F est également 2 fois dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et par conséquent sur $]0,+\infty[$.

La dérivée est donnée par $F'(x) = x\,G'(x) + G(x)$

$$\text{et} \quad F''(x) = x\,G''(x) + 2G'(x)$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{x(6x^2-2u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3} - \frac{4x\cos u}{(x^2+u^2)^2}\right]du$$

$$= x\int_0^\infty \frac{(2x^2-6u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3}\,du.$$

(f) Pour tout $(u,x) \neq (0,0)$ $\frac{\partial k}{\partial u}(u,x) = \frac{2u}{(x^2+u^2)^2}$ et $\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u,x) = \frac{2}{(x^2+u^2)^2} - \frac{8u^2}{(x^2+u^2)^3}$

$$= \frac{2x^2-6u^2}{(x^2+u^2)^3} = h(u,x)$$

(g) Et donc $F''(x) = x\int_0^\infty \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u,x)\cos u\,du$

En effectuant 2 intégrations par parties on trouve $F''(x) = x\int_0^\infty \frac{\partial k}{\partial u}(u,x)\sin u\,du$

$$= -x\int_0^\infty k(u,x)\cos u\,du = F(x)$$

(h) On sait (cf cours d'équations différentielles) que toute solution de ce genre d'équations différentielles est une combinaison linéaire de e^x et x^{-x}

Par conséquent $F(x) = ae^x + be^{-x}$

(i) F est bornée quand $x \to +\infty$ donc nécessairement $a=0$

Comme F est continue en 0, on a $b = F(0) = \frac{\pi}{2}$

Et donc $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$

Par parité $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice VI

1. D'après le cours (à redémontrer) on a vu que

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$ existe si et seulement si $\alpha<1$

2. Il est assez facile de voir que $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in]0,1]$

Supposons qu'il existe $a \in]0,1]$ t.q. $g(a) = \sup_{t\in[a,1]} f(t) = 1$

Alors puisque f est continue, elle atteint sa borne sup sur $[a,1]$

et donc il existe $b \in [a,1]$ t.q. $f(b)=1$, ceci contredit l'hypothèse sur f et on a donc bien $g(x)<1$ pour tout $x \in]0,1]$.

3. On suppose que $f'(0) > 0$ et on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit t.q. $0 < \varepsilon < f'(0)$

Alors d'après la définition de la dérivée de f en 0 on a ; il existe $t \in V_0$ t.q.

$|f(t) - f(0) - t f'(0)| \leq t\varepsilon$

On en déduit que si $t \in V_0$ (en fait tendre t vers 0 de toute façon)

$f(t) \geq 1 + t(f'(0) - \varepsilon) > 1$ $\Rightarrow$ contradiction avec l'hypothèse. Et on a donc $f'(0) \leq 0$

4. On applique le DL à f entre 0 et t et on a $f(t) = 1 - \lambda t + t\varepsilon_1(t)$ où $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$

" $t \mapsto e^{-\mu t}$ — $e^{-\mu t} = 1 - \mu(t) + t\varepsilon_2(t)$ où — $\varepsilon_2(t) = 0$

Alors $\dfrac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda + \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$

et donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda$

5. a. Soit $\mu > \lambda$. Supposons que pour tout $x \in]0,1]$, $\exists t \in [0,x]$ t.q. $f(t) < e^{-\mu t}$

Soit $0 < \varepsilon < \mu - \lambda$. Alors d'après 4) il existe α t.q. pour tout $s \in [0,\alpha]$ ($s \in V_0$)
$\alpha > 0$

$|f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s| \leq \varepsilon s$ et donc $\forall s \in [0,\alpha]$ $f(s) > e^{-\mu s}$

Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a l'existence de $x_\mu \in]0,1]$

t.q. $\forall t \in [0, x_\mu]$, $f(t) \geq e^{-\mu t}$

b. $\displaystyle\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t} \frac{dt}{t^\alpha} \geq (n\mu)^{\alpha - 1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha}$ (en posant $s = n\mu t$)

c) lorsque $n \to \infty$ $\displaystyle\left(\mu^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$ donc toute valeur

d'adhérence de la suite $\displaystyle\left(n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est supérieure à cette limite.

en particulier $\displaystyle\liminf_{n \to \infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\mu > \lambda$ on a aussi

$$\liminf_{n \to \infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}$$

6. a. $0<\mu<\lambda$.

Supposons que pour tout $x \in]0,1]$, $\exists t \in [0,x]$ t.q. $f(t) > e^{-\mu t}$

Soit $0 < \varepsilon < \lambda - \mu$.

Alors d'après 4) $\underset{>0}{\exists \alpha}$ t.q $\forall s \in [0,\alpha]$ $|f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s| \leq \varepsilon s$

Ceci implique en particulier que $\forall s \in [0,\alpha]$ $f(s) < e^{-\mu s}$

Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a bien l'existence de $x_\mu \in]0,1]$ t.q. $\forall t \in [0, x_\mu]$ $f(t) \leq e^{-\mu t}$

b. $0<\mu<\lambda$ on peut écrire

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_0^{x_\mu} f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} + \int_{x_\mu}^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\leq \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t}\frac{dt}{t^\alpha} + g^n(x_\mu)\frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha}$$

c. Quand $n \to \infty$ $\left(\mu^{\alpha-1}\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n^{1-\alpha} g^n(x_\mu)\frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

sont deux suites qui tendent vers $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$ et 0 respectivement (car $g(x_\mu)<1$).

Donc toute valeur d'adhérence de la suite $\left(n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est inférieure à la somme de ces 2 limites

En particulier, on en déduit que $\limsup_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$

et comme cette inégalité est vraie pour $\mu<\lambda$ on a

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}$$

7) Des questions 5 et 6 on en déduit que $\left(n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a mêmes limites supérieure et inférieure, elle est donc convergente

et donc $\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}$ $n \to +\infty$.

Exercice VII

1. $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{s}$ $\quad s>0$

$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $s>0$ $\quad \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$ $\quad s>-3$ $\quad \mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$ $\quad s>0$

2. • $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ où $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

• $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

3. a) $\begin{cases} x' + 3x = 13\sin 2t \\ x(0) = 6 \end{cases}$

On applique la transformée de Laplace:

$\mathcal{L}\{x'\} + 3\mathcal{L}\{x\} = 13\,\mathcal{L}\{\sin 2t\}$ $\quad$ on pose $X(s) = \mathcal{L}\{x\}$

$\Leftrightarrow sX(s) - 6 + 3X(s) = \frac{26}{s^2+4}$

$\Leftrightarrow X(s)(s+3) = 6 + \frac{26}{s^2+4}$ $\Leftrightarrow X(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}$

$= \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}$

$x(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$

$= 8e^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\sin(2t)$

b. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = e^{-4t} \\ x(0) = 1 \quad x'(0) = 5 \end{cases}$

on a $s^2X(s) - sX(0) - X'(0) - 3[sX(s) - X(0)] + 2X(s) = \frac{1}{s+4}$

$X(s) = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16}{5(s-1)} + \frac{25}{6(s-2)} + \frac{1}{30(s+4)}$

$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$