Théorème 6 (SOLUTION SYST. NON HOMOGENE)

Si A est constante alors la solution de (3.2) est donnée par

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds. \tag{3.19}$$

A est singulière s'∃x≠0 t.q. Ax=0
A singulière ⇒ A non inversible

cf feuille bleue

La question qui se pose alors est la suivante : comment trouver e^{At} sans nécessairement passer par un calcul éventuellement fastidieux d'une série.
L'idée est la suivante :
nous allons chercher $X(t) \in \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation (3.5)

$$X' = AX,$$

Rappel : une matrice carrée A est inversible ⟺ ∄x non nul t.q. Ax=0
revoir cours Algèbre

sous la forme

$$X(t) = e^{\lambda t}V,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Lorsqu'on remplace cette valeur dans (3.5) on obtient

$$AV = \lambda V. \iff (\lambda I - A)V = 0 \iff$$ λI−A n'est pas inversible
$\iff \det(\lambda I - A) = 0, V \neq 0 \; (\Rightarrow)$ λ val. propre

Donc, $X(t) = e^{\lambda t}V$ sera solution si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, de vecteur propre correspondant $V \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Il est à noter que le résultat marche également sur $\mathbb{C}$.

3.4.2 Dimension 2

Avant de généraliser à la dimension n quelconque, nous allons commencer par les solutions des systèmes de deux équations et les portraits de phase associés, c'est à dire l'allure des courbes décrites par ces solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trois cas peuvent se distinguer.

a. Deux valeurs propres réelles distinctes !! (voir feuille jaune)

Soient λ et μ deux valeurs propres réelles de A, avec A diagonalisable.
Si P est une matrice de passage composée d'une base de vecteurs propres, on a

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

et les solutions de l'EDO homogène sont de la forme

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}P_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}P_2, \tag{3.21}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$ trouvées à partir des conditions initiales.

3.4.2. Dimension 2

On considère le système linéaire homogène suivant

$$X' = AX$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ càd $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$

Et on cherche les valeurs propres de A :

càd $\lambda \in \mathbb{C}$ de vect. propre associé $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ t.q

on ait $AV = \lambda V$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

En effet $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$

$$\iff a_{11}a_{22} + \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\iff \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

$$\iff \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

On a une eq. du 2nd degré (polynôme en λ)

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

$$\Delta = Tr(A)^2 - 4\det(A)$$

On a alors 3 cas:
- $\Delta > 0$: on aura 2 val. propres réelles distinctes
- $\Delta = 0$: " " 1 " " réelle (double)
- $\Delta < 0$: " " 2 val. propres complexes conjuguées

Rappel : si λ_1 et λ_2 sont 2 racines distinctes on a $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$

CAS $\boxed{\Delta > 0}$: on a 2 valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Soient V_1 et V_2 (les) 2 vect. propres associés à λ_1 et λ_2 resp.

on a V_1 et $V_2 \neq O_2$

Alors $AV_i = \lambda_i V_i \qquad i = 1,2$

Et $P = (V_1 | V_2)$ est une matrice de passage t.q.

$$D = P^{-1}AP \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ matrice diagonale}$$

En effet : $P = (V_1 | V_2) = \left(\begin{array}{c|c} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{array}\right) \quad \left(V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}\right)$

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} v_{11} + a_{12} v_{12} & a_{11} v_{21} + a_{12} v_{22} \\ a_{21} v_{11} + a_{22} v_{12} & a_{21} v_{21} + a_{22} v_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(A\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right) = (AV_1 | AV_2)$$

$$= (\lambda_1 V_1 | \lambda_2 V_2) = (V_1 | V_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P.D$$

Donc $AP = PD$ avec P inversible

donc $\cancel{A = }$ $P^{-1}AP = D$

(~~nous verrons dans le prochain chapitre comm~~

Propriété des exponentielles de matrice

① $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Car si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^3 \end{pmatrix}$

... $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Et donc $e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$

$$= I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\dots+\frac{\lambda_1^k}{k!} & & & 0 \\ & 1+\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{2!}+\dots+\frac{\lambda_2^k}{k!} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n+\dots+\frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

② Si P est inversible et $B = P^{-1}AP$
alors $e^B = P^{-1}e^AP$

En effet $B = P^{-1}AP$

$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$

$B^3 = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^3P$

$\vdots$

$B^k = P^{-1}A^kP$ (récurrence simple)

$$e^B = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} \right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{-1}A^kP}{k!}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right)P$$ et c'est important →

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{ou } \mathbb{C}}{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \to & \overset{\text{ou } \mathbb{C}}{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

est continue (on ne le montre pas)

Et donc $e^B = \lim_{N \to +\infty} P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right)P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right)P$

$= P^{-1}e^A P$

Donc ici $P = (V_1 | V_2)$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

t.q. $D = P^{-1}AP$

$\Rightarrow e^D = P^{-1}e^A P$

$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} = P^{-1}e^A P$

Et donc une fois que l'on a e^D on en déduit facilement e^A par les matrices de changement de base

Ici on a : $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

on va se ramener à un système + facile à décrire avec le changement de base :

On a : $X' = AX$ et on pose $Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$

$\Rightarrow X' = PY' \Leftrightarrow P^{-1}X' = Y'$

$\Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}AX$

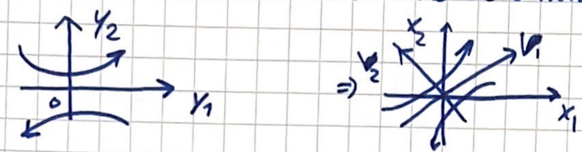
$\Leftrightarrow Y' = P^{-1}A(PY)$

$\Leftrightarrow Y' = P^{-1}APY$

$\Leftrightarrow Y' = DY$

Et donc on résout $Y' = DY$ (bcp. + facile) puis on se ramène à X en posant $X = PY$

P s'interprète comme une matrice de changement de base ses colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base sur l'ancienne base



Si $\Delta > 0$ on a 2 racines reelles distinctes

$X' = AX \qquad D = P^{-1}AP \qquad P = (V_1 | V_2) \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$ où $Y = P^{-1}X$ (càd $X = PY$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow$$

~~et donc x_1~~

Et on rappel que les solutions cherchées de

$X' = AX$ sont sous la forme (cf p. 37)

$X(t) = e^{\lambda t} V$

Par conséquent on a λ_1, V_1 et $\lambda_2 V_2$

On a trouvé $X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 \qquad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2$

qui sont lineairement independants.

autrement dit $M(t) = \left(e^{\lambda_1 t} V_1 \middle| e^{\lambda_2 t} V_2 \right)$

est une matrice fondamentale et dans ce cas, toute solution

X de $X' = AX$ s'écrit $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$

(c_1 et c_2 données à partir des conditions initiales) on revient à notre calcul :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = e^{\lambda_1 t} V_1 \\ X_2 = e^{\lambda_2 t} V_2 \end{cases}$$

$(\text{et } Y_1 = P^{-1} X_1 \text{ et } Y_2 = P^{-1} X_2)$

On a donc deux solutions distinctes.

Comment les tracer ?

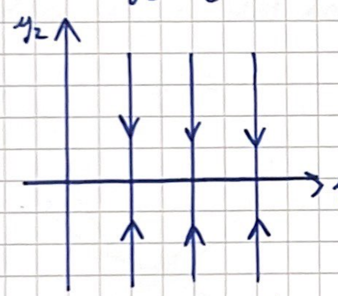
Plusieurs cas possibles

ⓐ si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: impossible d'avoir les 2 nulles en même temps car $\lambda_1 \neq \lambda_2$ par hyp

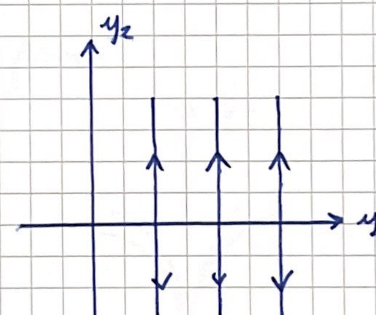
ⓑ on a donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(i). si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ (par ex. ; l'autre cas est analogue)

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$



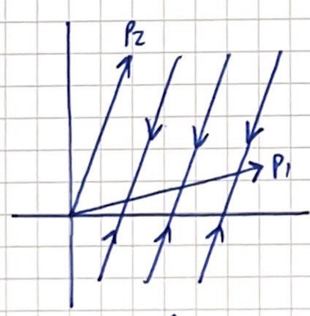
$\lambda_2 < 0$ VALLÉES



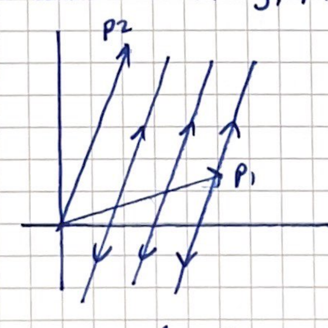
$\lambda_2 > 0$ CRÊTES

$(y_1(t) ; y_2(t))$ restent sur les droites // à Oy_2

Et dans la base (X_1, X_2) chaque solution est $X = y_1 V_1 + y_2 V_2$



$\lambda_2 < 0$



$\lambda_2 > 0$

(ii) si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ càd $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

Alors $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{y_1}{c_1} = e^{\lambda_1 t} \\ \frac{y_2}{c_2} = e^{\lambda_2 t} \end{array}$

on a : $\cancel{\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right) e^{\lambda_1}}$ $\Rightarrow \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\lambda_2} = e^{\lambda_1\lambda_2 t} = \left(\frac{y_2}{c_2}\right)^{\lambda_1}$

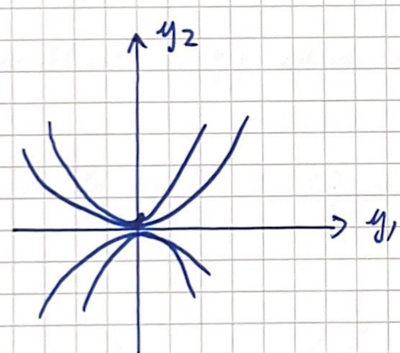
et donc $\frac{y_2}{c_2} = \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$

$\Rightarrow y_2 = c_2 c_1^{-\lambda_2/\lambda_1} y_1^{\lambda_2/\lambda_1} = C y_1^{\alpha}$ où $C = c_2 c_1^{-\lambda_2/\lambda_1}$

$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

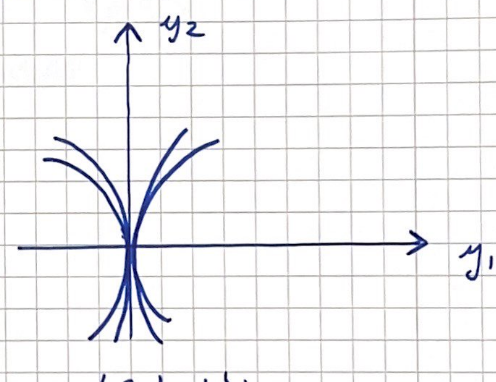
2 sous cas. (*) si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ càd $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$)

Alors les courbes sont de la forme



si $|\lambda_2| > |\lambda_1|$

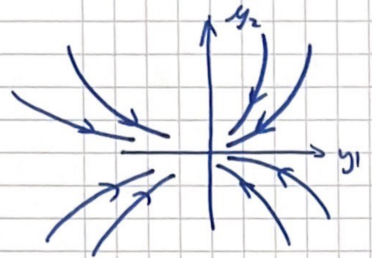
càd $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$

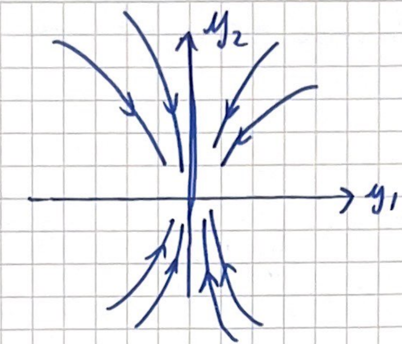


si $|\lambda_2| < |\lambda_1|$

càd $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

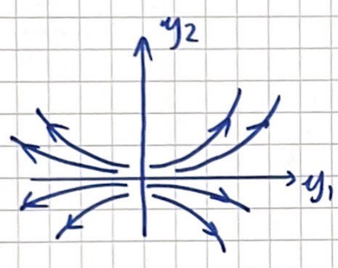
• si λ_1 et $\lambda_2 < 0$

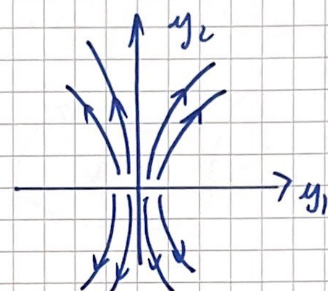




les solutions tendent vers $(0,0)$ si $t \to +\infty$ on dit que $O \binom{0}{0}$ est un noeud stable

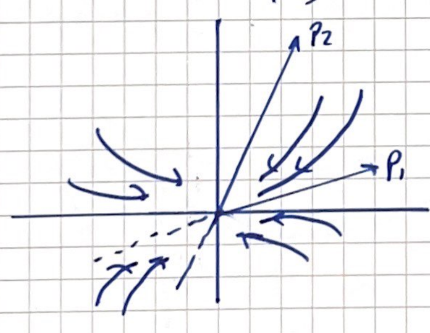
• si λ_1 et $\lambda_2 > 0$





on dit que $O \binom{0}{0}$ est un noeud instable

Dans la base (X_1, X_2) on aura:



par exemple

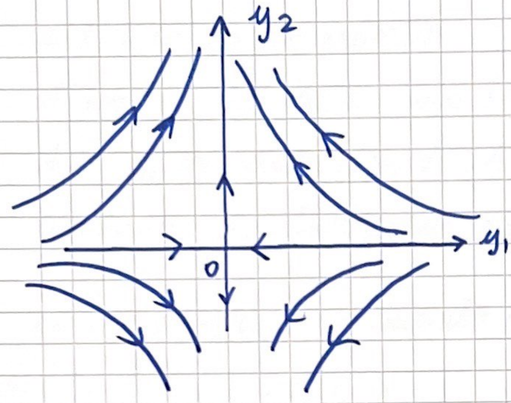
(*) si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ càd que λ_1 et λ_2 sont de signes différents

$y_2 = c_3\, y_1^{\alpha}$ avec $\alpha < 0$

ex : $\lambda_1 < 0$ $\quad \lambda_2 > 0$ $\qquad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

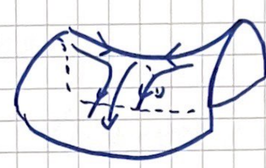
$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$ $\underset{\to 0}{t \to +\infty}$ et $\underset{\to \infty}{t \to -\infty}$

$y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$ $\underset{t \to +\infty}{\to \infty}$ et $\underset{t \to -\infty}{\to 0}$



on a des hyperboles

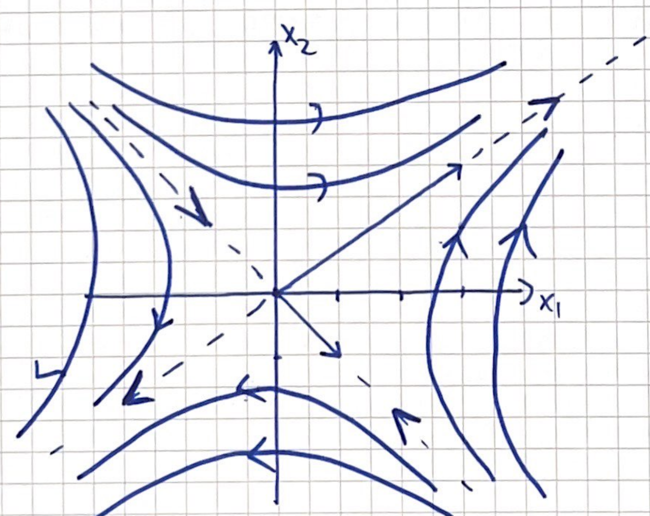
on dit que $O\binom{0}{0}$ est un point selle



ex : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda_1 = -1 \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4 \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ où $X_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



cas 2 : $\Delta = 0$ on a une valeur propre double

. si A est diagonalisable $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$ on a pas de problème

on a 2 vecteurs linéairement indépendants ...

on a le cas precedent $X = c_1 e^{\lambda_0 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_0 t} V_2 = e^{\lambda_0 t} [c_1 V_1 + c_2 V_2]$

. si A n'est pas diagonalisable

Il n'y a pas deux vecteurs props linéairement indépendants

Soit V_0 un vecteur propre de A associé à λ_0, $V_0 \neq 0$

On choisit U_0 linéairement indep. de V_0 càd $\det(V_0 | U_0) \neq 0$

alors $P = (V_0 | U_0)$ est inversible et on a :

$T = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ai $c \in \mathbb{R}^*$ (en general $\neq 1$)

Pour se ramener à une matrice J de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

on définit une nouvelle matrice de passage

$$P_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \qquad c^{-1} = \frac{1}{c}$$

Alors $J = P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ Forme de Jordan

Concrètement : par ex : si λ_0 est val. propre de A d'ordre de multiplicité 2 et de vect. propre V_0 associé

On trouve : $X_1 = e^{\lambda_0 t} V_0$ la 1ère solution

et on cherche la 2nde solution de la forme

$$X_2 = te^{\lambda_0 t} V_0 + W e^{\lambda_0 t}$$

on veut X_1 et X_2 linéairement indep.
càd que $X_2 \div X_1 \neq C^{te}$ $\quad \frac{X_2}{X_1} = c \Leftrightarrow X_2 = cX_1$

$\Rightarrow X_2 = F(t) X_1 \neq C^{te}$

$X_2 = t X_1 + C^{te}$

OBJECTIF : trouver W

$X' = AX$ avec $X_1' = AX_1$ et $X_2' = AX_2$

$$X_2' = e^{\lambda_0 t} V_0 + \lambda_0 t e^{\lambda_0 t} V_0 + \lambda_0 W e^{\lambda_0 t}$$

$$- AX_2 = te^{\lambda_0 t} AV_0 + e^{\lambda_0 t} AW$$

$$X_2' - AX_2' = (\lambda_0 V_0 - AV_0) te^{\lambda_0 t} + (V_0 + \lambda_0 W - AW) e^{\lambda_0 t}$$

et donc $X_2' - AX_2 = 0$ pour $t \in I$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AV_0 = \lambda_0 V_0 & \Rightarrow \text{on le savait déjà} \\ V_0 + \lambda_0 W - AW = 0 & \Rightarrow (A - \lambda_0 I) W = V_0 \end{cases}$

et on en déduit W.

Exemple : $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \qquad \lambda_0 = -3 \qquad V_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_1 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est sol

On cherche $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ t.q.

$(A - \lambda_0 I) W = V_0 \Leftrightarrow (A + 3I) W = V_0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6w_1 - 18w_2 = 3 \\ 2w_1 - 6w_2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow w_1 - 3w_2 = \frac{1}{2}$ si $w_1 = 1$ $w_2 = \frac{1}{6}$

ou $w_1 = \frac{1}{2}$ $w_2 = 0$ $\Rightarrow$ + simple on a alors $W = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

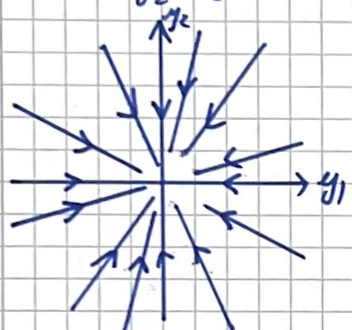
et $X_1 = e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 = te^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-3t}$

solutions generales : $X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2$.

<u>comment construit-on les solutions?</u>

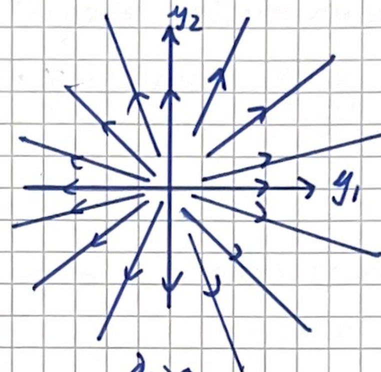
① cas où $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

on a : $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_0 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{c_2}{c_1} = C_3 \Rightarrow y_2 = c_3 y_1$



$\lambda_0 < 0$

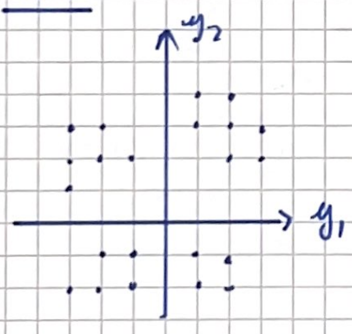
ETOILE STABLE



$\lambda_0 > 0$

ETOILE INSTABLE

② si <u>$\lambda_0 = 0$</u>



tout point de $\mathbb{R}^2$ est solution stationnaire $A = 0$

③ si $\lambda_0 \neq 0$ et $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

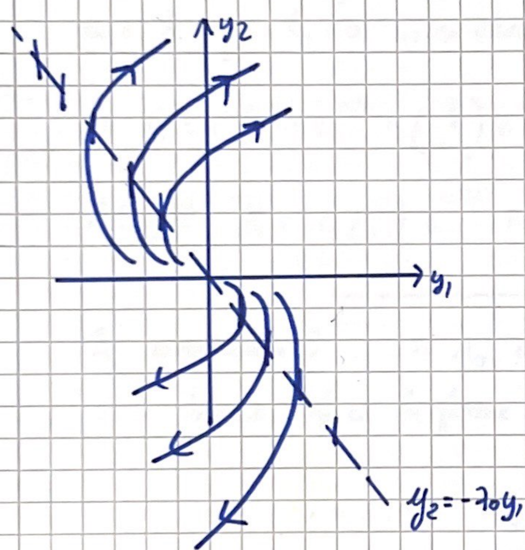
$$\begin{cases} y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda_0 y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = c_2 e^{\lambda_0 t} \Rightarrow y_1' = \lambda_0 y_1 + c_2 e^{\lambda_0 t}$$

$\Rightarrow$ ($y_{1,p} = c_2 t e^{\lambda_0 t}$ sol. particulière)

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = (c_1 + t c_2) e^{\lambda_0 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$$

Difficile d'exprimer y_2 en fonction de y_1.

si $y_1' = 0$ on a $y_2 = -\lambda_0 y_1$ tangentes verticales des courbes de y_2 en fonction de y_1

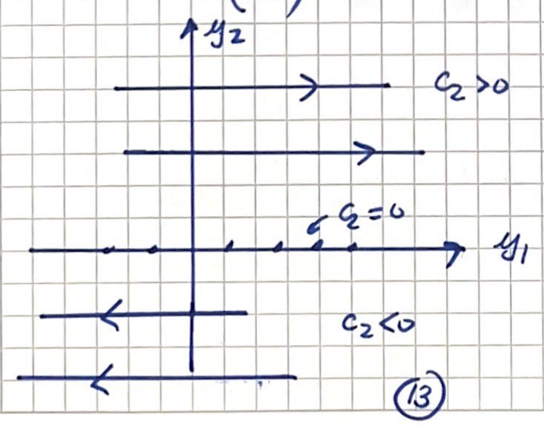


$\lambda_0 > 0$ NOEUD DÉGÉNÉRÉ

INSTABLE ($\lambda_0 > 0$)

STABLE ($\lambda_0 < 0$)

si $\lambda_0 = 0$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



$y_1' = y_2$

$y_2' = 0 \Rightarrow y_2 = c_2 \Rightarrow y_1' = c_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_2 t \\ y_2 = c_2 \end{cases}$$

$y_2 = c^{te}$ pas de mouvement vertical

$y_1 = c_2 t$: mouvement horizontal

$\underline{Ex}$: $X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

$\lambda_0 = -3 \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$

On cherche K t.q.

$(A - \lambda_0 I_2) K = U_0$ $\quad$ càd $\quad (A + 3 I_2) K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k_1 - 18k_2 = 3 \\ 2k_1 - 6k_2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad k_1 - 3k_2 = \frac{1}{2}$

si $k_1 = 1 \quad k_2 = \frac{1}{6}$

ou si $k_1 = \frac{1}{2} \quad k_2 = 0$ $\to$ on choisit celui-là

$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Sol. g^{ale} $\quad X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$

En dimension 3 $\quad$ si λ_0 est d'ordre de multiplicité 3

On cherche X_2 de la forme $X_2 = U_0 t e^{\lambda_0 t} + K_1 e^{\lambda_0 t}$

et on " $\quad X_3$ " " " $\quad X_3 = U_0 \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_0 t} + K_1 t e^{\lambda_0 t} + K_2 e^{\lambda_0 t}$

où $U_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \\ u_0^3 \end{pmatrix}$ connu $\quad$ et K_1 et K_2 à trouver

t.q. $X_3' = A X_3$

$X_3' = U_0 t e^{\lambda_1 t} + U_0 \frac{t^2}{2!} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_1 e^{\lambda_1 t} + K_1 t \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$

$A X_3 = A U_0 \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + A K_1 t e^{\lambda_1 t} + A K_2 e^{\lambda_1 t}$

$X_3' - A X_3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(A U_0 - \lambda_1 U_0)}_{=0} \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + \underbrace{(A K_1 - \lambda_1 K_1 - U_0)}_{=0} t e^{\lambda_1 t} + (A K_2 - \lambda_1 K_2 - K_1) e^{\lambda_1 t} = 0$

K_2 doit donc vérifier $\quad (A-\lambda_1 I)K_2 = K_1$

On doit donc avoir : $\quad (A-\lambda_1 I)U_0 = 0$

$$(A-\lambda_1 I)K_1 = U_0$$

$$(A-\lambda_1 I)K_2 = K_1$$

<u>Exemple</u> : $X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ ordre de multiplicité 3

$(A-2I)U_0 = 0 \Rightarrow U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(A-2I)K_1 = U_0 \Rightarrow P = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$(A-2I)\cancel{C}K_2 = K_1 \Rightarrow K_2 = \begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}$

donc $X = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right]$

$$+ c_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}e^{2t} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

<u>En dimension n</u>

Si λ_1 est d'ordre de multiplicité m

On cherche $X_1 = U_0 e^{\lambda_1 t}$

$$X_2 = U_0 te^{\lambda_1 t} + K_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$X_3 = U_0 \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + K_1 te^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\vdots$$

$$X_m = U_0 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + K_1 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_2 t} + \dots + K_{m-1}e^{\lambda_1 t}$$

où les U_0, K_i $i=1,\dots,m-1$ sont donnés par

$$(A-\lambda_1 I)U_0 = 0$$
$$(A-\lambda_1 I)K_1 = U_0$$
$$(A-\lambda_1 I)K_2 = K_1$$
$$\vdots$$
$$(A-\lambda_1 I)K_{m-1} = K_{m-2}$$

et $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$.

De façon générale, s'il y a plusieurs val. propres d'ordre de multiplicité ≥ 1

On obtiendrait grâce à une matrice de passage que

$$T = P^{-1}AP \quad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} [T_1] & & 0 \\ & [T_2] & \\ 0 & & \ddots [T_k] \end{pmatrix}$$

où chaque bloc $T_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & \times\times\times \\ & \ddots \quad \times\ \times \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix}$ $j=1,\dots,k$

alors $e^A = P \begin{pmatrix} [e^{T_1}] & & 0 \\ & [e^{T_2}] & \\ 0 & & \ddots [e^{T_k}] \end{pmatrix} P^{-1}$

ça se fait par recurrence: $T^n = \begin{pmatrix} [T_1^n] & & \\ & [T_2^n] & \\ & & \ddots [T_k^n] \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} T^n = \begin{pmatrix} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} T_1^n\right] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} T_k^n\right] \end{pmatrix}$$

par conséquent... $A = PTP^{-1}$

$A^n = PT^nP^{-1}$ et $e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} A^n = P\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} T^n\right)P^{-1} = Pe^TP^{-1}$

On est donc ramenés à calculer chacun des e^{J_j} $j=1,\dots,k$

<u>Rappel</u>: Soit B matrice triangulaire $\in M_q(\mathbb{K})$ de la forme
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & \times & \times & \times \\ & \ddots & & \times \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ où } \lambda\in\mathbb{C}$$

(ici $B=e^{J_j}$)

on a $B=\lambda I_q+N$ où I_q = identité dans $M_q(\mathbb{K})$

$$N=\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbb{K})$$

alors N^m admet $m+q-1$ diagonales nulles

d'où $m\leq q \Rightarrow m+q\leq 2q$

$\Rightarrow m+q-1\leq 2q-1$

Ex: $N=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad N^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$m=1$ 3 diag. nulles $\quad$ $m=2$ $2+3-1=4$ diag. nulles $\quad$ $m=3$ $3+3-1=5$ diag. nulles

$q=3$ $\quad$ $q=3$

or la matrice $\in M_q(\mathbb{K})$ contient $2q-1$ diagonales

donc il existe $m\in\mathbb{N}^*$ t.q. $N^m=0 \iff m+q-1=2q-1$

$N^{m-1}\neq 0 \iff \boxed{m=q}$

et donc $N^m=0$ $\forall m\geq q$ nilpotente d'indice q

on a alors $e^N=I_q+N+\frac{N^2}{2!}+\dots+\frac{1}{(q-1)!}N^{q-1}$ $(*)$

on a

$B=\lambda I_q+N$ or λI_q et N <u>commutent</u>!

$\Rightarrow e^B=e^{\lambda I_q+N}=e^{\lambda I_q}e^N=e^{\lambda}I_q\, e^N=e^{\lambda}e^N$

et donc $e^{B} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \times\times\times \\ & \ddots & \times \\ 0 & & e^{\lambda} \end{pmatrix}$ càd $e^{J_j} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & \times\times\times \\ & \ddots & \times \\ & & e^{\lambda_j} \end{pmatrix}$

où e^{N} est donné par $(*)$

__cas des valeurs props complexes:__

on a $\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$

on a 2 sol. linéairement indep $X_1 = U_1 e^{\lambda_1 t}$ et $\bar{U}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} = \bar{X}_1$

$$X = c_1 X_1 + c_2 \bar{X}_1$$

Dans la pratique :

$$X_1 = U_1 e^{\lambda_1 t} = U_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = U_1 e^{\alpha t}[\cos\beta t + i \sin\beta t]$$
$$\bar{X}_1 = \bar{U}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} = \bar{U}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \bar{U}_1 e^{\alpha t}[\cos\beta t - i\sin\beta t]$$

$\tilde{X}_1 = \frac{X_1 + \bar{X}_1}{2}$

$\tilde{X}_2 = \frac{(-X_1 + \bar{X}_1)i}{2}$

si on pose: $\tilde{X}_1 = \frac{1}{2}(U_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{U}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{1}{2}(U_1 + \bar{U}_1) e^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{i}{2}(-U_1 + \bar{U}_1) e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\tilde{X}_2 = \frac{i}{2}(-U_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{U}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) = \frac{i}{2}(-U_1 + \bar{U}_1)$

or $\underbrace{\frac{1}{2}(z + \bar{z})}_{= Re(z)} = \alpha$ et $\underbrace{\frac{i}{2}(-z + \bar{z})}_{= Im(z)} = \beta$ si $z = \alpha + i\beta$

donc $\frac{1}{2}(U_1 + \bar{U}_1) = B_1 = Re(U_1)$

$\frac{i}{2}(-U_1 + \bar{U}_1) = B_2 = Im(U_1)$

$\Rightarrow$ $\tilde{X}_1 = (B_1 \cos\beta t - B_2 \sin\beta t) e^{\alpha t}$

$\tilde{X}_2 = (B_2 \cos\beta t + B_1 \sin\beta t) e^{\alpha t}$

Valeurs propres multiples: de façon générale comment trouver les vecteurs propres?

Rappel: • Si dans $X' = AX$, la matrice A est symétrique avec des valeurs réelles alors la matrice A est diagonalisable

(si λ est val. propre, sa multiplicité géométrique = sa multiplicité algébrique)

• les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toutes réelles $\underline{A \in M_n(\mathbb{R})}$

Que se passe-t-il si A n'est pas diagonalisable?

• Si λ est val. propre de A d'ordre de multiplicité 2 et V un vect. propre associé à λ. On trouve le second comme en page 11 $(A - \lambda I) W = V \Rightarrow W$

• ordre de multiplicité 3

On a λ d'ordre de multiplicité 3 avec 1 seul vect. propre associé V

On cherche $W \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0_3\}$ de la même façon que ci-dessus

càd que $(A - \lambda I) W = V$

On aura alors $X_2 = V t e^{\lambda t} + W e^{\lambda t}$

On cherche X_3 sous la forme: $X_3 = V \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + W t e^{\lambda t} + \varphi e^{\lambda t}$

avec W et φ à chercher t.q. $X_3' = A X_3$

↳ déjà trouvé

$X_3' = V t e^{\lambda t} + V \frac{t^2}{2} \lambda e^{\lambda t} + W e^{\lambda t} + W \lambda t e^{\lambda t} + \varphi \lambda e^{\lambda t}$

$A X_3 = A V \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + A W t e^{\lambda t} + A \varphi e^{\lambda t}$

$$X_3' - AX_3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(AV - \lambda V)}_{=0}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + \underbrace{(AW - \lambda W - V)}_{=0} t e^{\lambda t} + (A\varphi - \lambda\varphi - W)e^{\lambda t} = 0$$

car $AV = \lambda V$ car $(A-\lambda I)W = V$

$\Rightarrow (A - \lambda I)\varphi = W$

On a en résumé: $(A - \lambda I)V = 0$

$(A - \lambda I)W = V$

$(A - \lambda I)\varphi = W$

Exemple: $X' = AX$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$ val. propre triple

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(A - 2I)W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - 2I)\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

Et alors

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} e^{2t}\right]$$

Et en règle générale quand λ est d'ordre de multiplicité m

$X_1 = V e^{\lambda t}$

$X_2 = V t e^{\lambda t} + W e^{\lambda t}$

$X_3 = V \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + W t e^{\lambda t} + \varphi e^{\lambda t}$

$\vdots$

$X_k = V_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t} + V_2 \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda t} + \dots + V_m e^{\lambda t}$

où $V_2 = W$, $V_3 = \varphi$ etc...

et V_i, $i = 1, \dots, m$ sont donnés par

$(A-\lambda I)\,K_1 = 0$
$(A-\lambda I)\,K_2 = K_1$
$\vdots$
$(A-\lambda I)\,K_m = K_{m-1}$ et $X = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i$

<u>cas 3</u> $\Delta < 0$ On a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \overline{\lambda_1}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$

de vect. propres associés $V_1 = U + iV$ et $V_2 = U - iV = \overline{V_1}$ complexes conjugués

et $U, V \in \mathbb{R}^2$ non tous les 2 nuls.

On a alors $AV_1 = \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow A(U+iV) = \lambda_1 V_1 = \lambda_1 (U+iV)$ $(*)$

$A\overline{V_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{V_1} \Leftrightarrow A(U-iV) = \overline{\lambda_1} \overline{V_1} = \overline{\lambda_1}(U-iV)$ $(**)$

$(*)$ $AU + iAV = \lambda_1 U + i\lambda_1 V$

$= (\alpha + i\beta)U + i(\alpha + i\beta)V$

$AU + iAV = \alpha U + i\beta U + i\alpha V - \beta V = (\alpha U - \beta V) + i(\alpha V + \beta U)$

Par identification $AU = \alpha U - \beta V$

$AV = \alpha V + \beta U$

<u>donc</u> $A\,(U|V) = (U|V)\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

<u>càd</u> $A\,P = P\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{J} \Rightarrow J = P^{-1}AP$

Dans la base $(U|V)$ A s'écrit donc $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\beta \neq 0$

On passe aux coordonnées polaires : $Y' = JY$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$r > 0$ $\quad y_1 = r\cos\theta$

si $r = 0$ $\quad y_2 = r\sin\theta$

↓

on est à l'équilibre

$y_1^2 + y_2^2 = r^2 \qquad \tan\theta = \frac{y_2}{y_1} \qquad r := r(t) \quad \theta := \theta(t)$

$y_1'(t) = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = \alpha r\cos\theta - \beta r\sin\theta$ ①

$y_2'(t) = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = +\beta r\cos\theta + \alpha r\sin\theta$ ②

① . $\cos\theta$ ⇒ $\quad r'\cos^2\theta - \cancel{r\theta'\cos\theta\sin\theta} = \alpha r\cos^2\theta - \cancel{\beta r\cos\theta\sin\theta}$

② $\sin\theta$ $\quad r'\sin^2\theta + \cancel{r\theta'\cos\theta\sin\theta} = \cancel{\beta r\cos\theta\sin\theta} + \alpha r\sin^2\theta$

$\boxed{r' = \alpha r}$ (*)

① $-\sin\theta$ $\quad -r'\cos\theta\sin\theta + r\theta'\sin^2\theta = -\alpha r\sin\theta\cos\theta + \beta r\sin^2\theta$

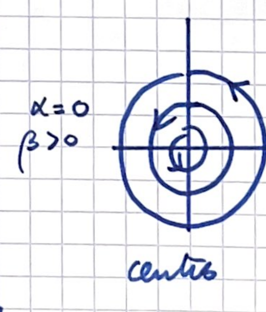
② $\cos\theta$ $\quad r'\cos\theta\sin\theta + r\theta'\cos^2\theta = \beta r\cos^2\theta + \alpha r\sin\theta\cos\theta$

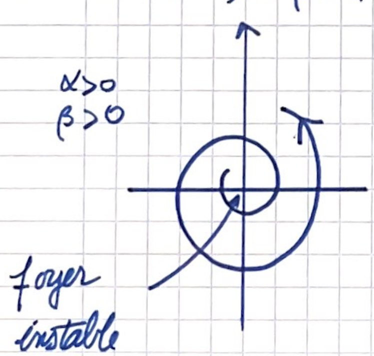
$r\theta' = \beta r$

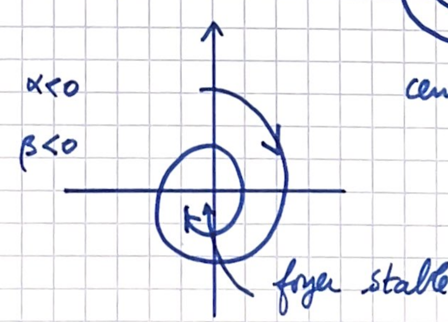
⇔ $\theta' = \beta$ (**)

⇒ $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$

$\theta(t) = \beta t + \theta_0$







$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{J} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

<u>En effet</u> : $e^{tJ} = e^{t\left(\alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$ $\qquad$ I commute avec $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= e^{\alpha t I} \cdot e^{\beta t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{\alpha t} I . \, e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha t} e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

<u>Calcul de $e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$</u>

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $C^2 = -I_2$ $\qquad$ $C^3 = -C I_2 = -C$

$\qquad$ $C^4 = I_2$ $\qquad$ $C^5 = C$

$$\dots \quad C^n = \begin{cases} (-1)^p \, Id & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p \, C & \text{si } n = 2p-1 \end{cases}$$

Donc $e^{C} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} C^n = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \overset{I_2}{\cancel{\ }} + \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} C^{\cancel{\ }}$

$\cancel{= \cos t}$

d'où

$$e^{\beta t C} = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (\beta t)^{2p} \underset{I_2}{\underset{\shortparallel}{C^{\cancel{\ }}}} + \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (\beta t)^{2(p+1)} \underset{\shortparallel}{C^{\cancel{\ }}}$$

$$= \cos(\beta t) \, I_2 + \sin(\beta t) \, C$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

et donc $e^{tJ} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$

Expression des solutions de $X' = AX$

a. Dimension 2 :

Comment donner l'expression des solutions dans ces différents cas

Le but est de trouver les sol. fondamentales et donc la matrice $M(t)$

càd $M(t) = e^{At}$ quand c'est simple, soit $M(t)E$ ou $EM(t)$

quand c'est + compliqué.

CAS 1 : A diagonalisable avec 2 val. propres distinctes

Si A est diagonalisable, on peut trouver 2 val. propres λ_1 et λ_2

et 2 vect. propres associés U_1 et U_2 linéairement indep.

Si on pose $M(t) = \left[e^{\lambda_1 t}U_1 \,|\, e^{\lambda_2 t}U_2\right]$ on a alors (avec $P = (U_1|U_2)$)

$M(t) = Pe^{Dt}$.

Et donc $M(t) = Pe^{Dt}$ est une matrice fondamentale

or $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} \Rightarrow Pe^{Dt} = e^{At}P$

$\Rightarrow M(t) = e^{At}P$

$\Rightarrow e^{At} = M(t)P^{-1}$

on a remarqué après le théo. 4 que une matrice fondamentale

n'est pas unique

→ si $M(t)$ est fondamentale, alors $\forall E \in M_n(\mathbb{R})$ (E constante)

$M(t)E$ est " également

donc ici e^{At} et $M(t)$ sont 2 mat. fondamentales

Si on prend $M(t) = \left(e^{\lambda_1 t} U_1 \;\middle|\; e^{\lambda_2 t} U_2\right)$

on a alors $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} U_2$ $\quad c_1$ et $c_2 \in \mathbb{R}$

données par les cond. init.

CAS 2 : λ_0 val. propre double

. si A diagonalisable : $e^{At} = e^{\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix} t}$

on retombe au cas précédent $\quad X(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} U_1 + c_2 e^{\lambda_0 t} U_2$

$= e^{\lambda_0 t}\left[c_1 U_1 + c_2 U_2\right]$

. si A non diagonalisable

Dans ce cas, on n'a qu'un seul vect. propre U_0 associé à λ_0

Il faut donc chercher un autre vecteur linéairement indép. de U_0.

On le note K par ex.

Pour qu'il ne soit pas dep. de U_0 on procède de la façon suivante :

On a $X_1 = U_0 e^{\lambda_0 t}$ on cherche K t.q.

$X_2 = U_0 t e^{\lambda_0 t} + K e^{\lambda_0 t}$ sol. de $X' = AX$. Il est indep. de X_1

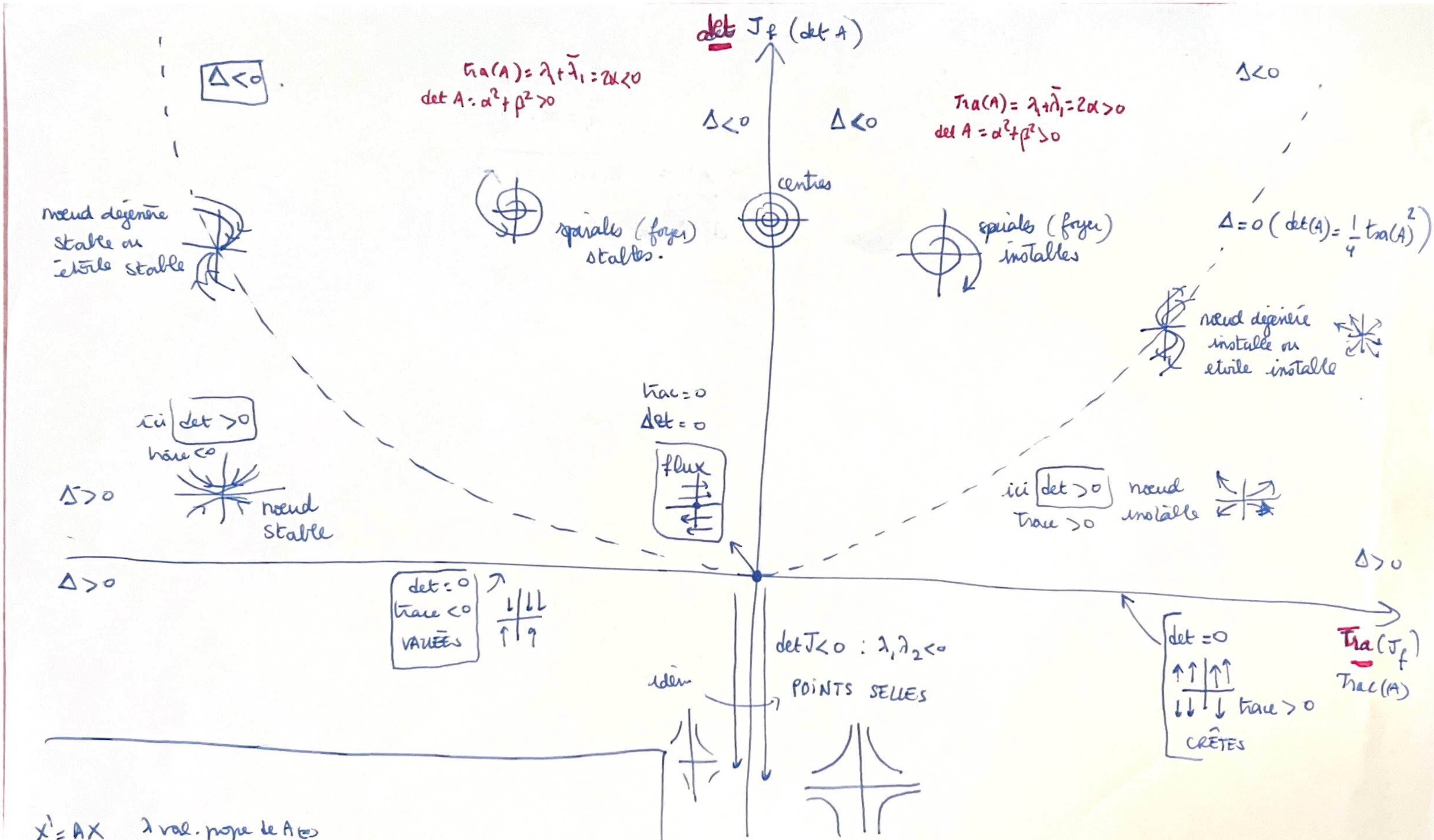
$$X_2' = U_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 U_0 t e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 K e^{\lambda_0 t}$$

$$- \quad AX_2 = AU_0 t e^{\lambda_0 t} + AK e^{\lambda_0 t}$$

$$X_2' - AX_2 = (\lambda_0 U_0 - AU_0) t e^{\lambda_0 t} + (U_0 + \lambda_0 K - AK) e^{\lambda_0 t} = 0 \quad \forall t$$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda_0 U_0 - AU_0) t + (U_0 + \lambda_0 K - AK) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} AU_0 = \lambda U_0 & \text{on le savait déjà} \\ (A - \lambda_0 I_2) K = U_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ K doit satisfaire cette éq.



$\Delta > 0$

$x' = AX$ λ val. propre de A $\iff$

$\lambda^2 - \text{tra}(A)\lambda + \det(A) = 0$

$\Rightarrow$ $\Delta = \text{tra}(A)^2 - 4\det A$.

$\Delta<0$ trac(A)$^2 \leq 4\det A$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ tra A$^2 \leq \det A$

tr(A) = $\lambda_1+\lambda_2$

det(A) = $\lambda_1\lambda_2$

– diagramme de classification des équilibres