TD 6

Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$):
   (a) $\sum (-1)^n (n+3)!\ z^n$,
   (b) $\sum n^n z^n$,
   (c) $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
   (d) $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
   (e) $\sum z^{n!}$,
   (f) $\sum (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
   (g) $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.

2. soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:
   (a) $\sum a_n z^{3n}$,
   (b) $\sum a_n 3^n z^{2n}$.

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes:
   (a) $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
   (b) $\sum \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.

4. Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

5. Vrai ou faux ?
   (a) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
   (b) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

6. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum x^n$.

(b) En utilisant l'expression des sommes partielles d'une série géométrique, montrer que $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$.

(c) En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum nx^n$, de $\sum n^2x^n$ et de $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

7. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

   (b) Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \text{ch}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

   (c) En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x)$.

   (d) En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

8. Déterminer les séries entières solutions de $x^2f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0$. Calculer le rayon des séries entières obtenues.

TD6 - SÉRIES ENTIÈRES

I RAYON DE CONVERGENCE

ⓐ $\sum (-1)^n (n+3)!\, z^n$ $\qquad \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(n+4)!}{(n+3)!} = n+4 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{R=0}$

ⓑ $\sum n^n z^n$ $\qquad \sqrt[n]{|a_n|} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{R=0}$

ⓒ $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ $\qquad \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$ donc $\boxed{R=\frac{1}{4}}$

ⓓ $\sum \dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$ $\qquad \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \cdot \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{\ln(n)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{R=1}$

ⓔ $\sum z^{n!}$ est bien une série entière parce que $n!$ est un entier !!!

Elle est de la forme $\sum a_p z^p$ où $a_p = 1$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $p = n!$ et $a_p = 0$ sinon.

Pour calculer son rayon de convergence, on peut remarquer que si

. si $|z|>1$ $\quad |z|^{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $z^{n!} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum z^{n!}$ diverge grossièrement

. si $|z|<1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq |z|^{n!} < |z|^n$ et $\sum |z|^n$ est une série géométrique convergente donc $\sum z^{n!}$ est abs. cv

On a donc . pour $|z|>1$ $\quad \sum z^{n!}$ div

. pour $|z|<1$ $\quad \sum z^{n!}$ cv

Il est alors inutile d'étudier le cas $|z|=1$ car $\boxed{R=1}$

N.B. : On peut également utiliser la formule d'Hadamard :

la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constituée de 0 et de 1 et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n!]{|a_{n!}|} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$= \limsup\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{|a_p|}$ donc $\boxed{R=1}$

(f) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ $\quad \sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \exp\left(n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} e$

donc $\boxed{R = \frac{1}{e}}$

(g) $\sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$ $\quad \sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$

$\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(n\left(\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left((-1)^n + o(1)\right)$

donc $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.
On peut en extraire deux sous-suites qui ont des limites différentes

$\sqrt[2p]{|a_{2p}|} \underset{+\infty}{\sim} \exp(1+o(1)) \underset{p\to\infty}{\to} e$ et $\sqrt[2p+1]{|a_{2p+1}|} \underset{+\infty}{\sim} \exp(-1+o(1)) \underset{p\to\infty}{\to} \frac{1}{e}$

donc $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = e$ donc $\boxed{R = \frac{1}{e}}$ (cf cours p31)

2 Rayon de convergence

(a) On pose $Z_1 = z^3$ et on a alors $\sum a_n z^{3n} = \sum a_n Z_1^n$ or $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R donc
pour $|Z_1| > R$ $\quad \sum a_n Z_1^n$ div
et pour $|Z_1| < R$ $\quad$ " $\quad$ cv $\Big\}$ en termes de z, ça donne

pour $|z|^3 > R$ cad $|z| > R^{1/3}$ $\quad \sum a_n z^{3n}$ div
pour $|z|^3 < R$ cad $|z| < R^{1/3}$ $\quad \sum a_n z^{3n}$ cv

donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^{3n}$ est $\boxed{R^{1/3}}$

(b) $\sum a_n 3^n z^{2n}$. On pose $Z_1 = 3z^2$. On a alors $\sum a_n 3^n z^{2n} = \sum a_n Z_1^n$
donc si $3|z|^2 > R$ cad $|z| > \sqrt{\frac{R}{3}}$ on a $\sum a_n 3^n z^{2n}$ div, donc le rayon de
et si $3|z|^2 < R$ " $|z| < \sqrt{\frac{R}{3}}$ " cv $\Big\}$ cv de $\sum a_n 3^n z^{2n}$
est $\boxed{\sqrt{\frac{R}{3}}}$

3 Rayon de cv

(a) $\sum (-1)^n \cdot \frac{n^n}{n!} z^{4n+1} = z \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n}$

Cette série a le même rayon de cv que $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n}$

On pose $Z_1 = z^4$ et on étudie

$\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} Z_1^{\ n}$ $\qquad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$

Donc, le rayon de converge de la série d'inconnue Z_1 est $\frac{1}{e}$ donc celui de la série d'inconnue z est $\boxed{R = \frac{1}{e^{1/4}}}$

Remarque: ça ne serait pas pratique ici d'utiliser la formule d'Hadamard à cause du $n!$

(b) $\sum \frac{n!}{1.3. \dots (2n+1)} z^{2n+3}$ a le même rayon de cv que $\sum \frac{n!}{1.3.\dots(2n+1)} z^{2n}$

On pose $Z_1 = z^2$ et on étudie $\sum \frac{n!}{1.3.\dots(2n+1)} Z_1^{\ n}$

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{1.3.\dots(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1.3.\dots(2n+1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

Donc le rayon de cv de la série d'inconnue Z_1 est 2 et celui de la série d'inconnue z est $\boxed{R = \sqrt{2}}$

4 $\quad \sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n \qquad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sin(1/\sqrt{n+1})}{\sin(1/\sqrt{n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc $\boxed{R = 1}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ t.q. $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$

On étudie $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{in\theta}$

. si $\theta = 0$ on étudie $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ or $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

c'est une série à termes > 0 donc $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge

. si $\theta \neq 0$ on peut utiliser la règle d'Abel

On pose : $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{in\theta} = \alpha_n u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $u_n = e^{in\theta}$

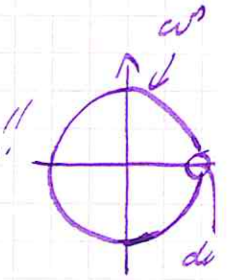
on a (i). $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et sin est $\nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\searrow$ vers 0

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ indep. de n

Donc $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{in\theta}$ cv

Finalement, $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ cv sur tout le cercle unité sauf en 1 !!



$\boxed{5}$ (a) Le rayon de cv de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |(-1)^n a_n|^{1/n}}$

donc $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n z^n$ ont le m̂ rayon de cv

(b) Ces 2 séries ont le m̂ disque de cv mais elles n'ont pas forcément le m̂ comportement sur le bord

Ex : si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ on sait que $\sum a_n z^n$ cv sur le disque unité sauf en 1

si on étudie $\sum (-1)^n a_n z^n$ pour $z = e^{i\theta}$

on a $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{i\theta n} = e^{in\pi} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{in\theta} = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{i(\theta+\pi)n}$

L'étude de l'ex précédent est encore valable mais il faut remplacer θ par $\theta + \pi$. Donc $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ cv sur tout le cercle unité sauf là où $\theta + \pi = 0 \ [2\pi]$ càd sauf pour $z = -1$.

6 a) $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ donc $\boxed{R = 1}$

b) On sait $\forall x \in]-1,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{N} x^n = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-x}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1,1[$

c) D'après le cours $\sum x^n$ et $\sum n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence
Multiplier par x ne change pas la cv donc le rayon de cv de $\sum n x^n$ est aussi 1 :
$\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = x\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Si on dérive une nouvelle fois, on obtient $\sum n(n-1) x^{n-2}$ dont le rayon de cv est encore 1
On a donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \left((1-x)^{-2}\right)' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

Or $\sum n^2 x^n$ est la série somme de $\sum (n^2-n) x^n$ et $\sum n x^n$ qui ont un rayon de cv égal à 1 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2-n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n^2-n) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{x}{(1-x)}\right.$
Donc son rayon de cv est au moins 1, parfois le rayon de cv de la somme est > que le rayon de cv de chacun des termes)
Mais pour $x = 1$ $\sum n^2 x^n$ div grossièrement, donc son rayon de cv est 1.

$\forall x \in]-1,1[$ $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\sum x^n$ ont le m rayon de cv 1, et $\forall x \in]-1,1[$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{1}{1-x}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) + C$ et en faisant $x = 0$, on voit que $C = 0$.

7 a) $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, on pose $X = x^2$ et on étudie $\sum \dfrac{X^n}{(2n)!}$ $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc le rayon de cv de la série d'inconnue X est $+\infty$, et celui de la série d'inconnue x aussi.

ⓑ $ch'(x) = sh(x)$ et $sh'(x) = ch(x)$

Donc pour n pair $ch^{(n)}(x) = ch(x)$ et pour n impair $ch^{(n)}(x) = sh(x)$

ⓒ On applique Taylor-Lagrange à ch entre 0 et x à l'ordre $2p$,

$\exists c_p$ compris entre 0 et x :

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{2p} \frac{x^n}{n!} ch^{(n)}(0) + \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} ch(c_p)$$

or $sh(0) = 0$ et $ch(0) = 1$ donc :

$ch(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} ch(c_p)$. On fait $p \to \infty$ et il reste à vérifier q

$\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} ch(c_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$!! On a : $\left|\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} ch(c_p)\right| \leq \frac{|x|^{2p+2}}{(2p+2)!} ch(|x|)$

(car ch est paire et $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$).

Pour montrer que $\frac{|x|^{2p+2}}{(2p+2)!} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ on passe par la série

$\sum \frac{|x|^{2p+2}}{(2p+2)!}$ et on utilise d'Alembert $\frac{|x|^{2p+4}}{(2p+4)!} \cdot \frac{(2p+2)!}{|x|^{2p+2}} = \frac{|x|^2}{(2p+3)(2p+4)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0<1$

donc $\sum \frac{|x|^{2p+2}}{2p+2}$ cv, donc $\frac{|x|^{2p+2}}{2p+2} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$

ⓓ Les séries entières $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ont le m̂ rayon de cv,

or on a vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ cv vers $ch(x)$, donc $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ cv vers $sh(x) + C$

$$sh(x) + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

En faisant $x = 0$, on voit que $C = 0$

$\boxed{8}$ $x^2 f''(x) - x(2x^2-1) f'(x) - (2x^2+1) f(x) = 0$

On cherche $f(x)$ sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, dont on calculera le rayon de cv^{ce} R, à la fin.

On a alors $\forall x \in]-R, R[$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

donc $x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x(2x^2-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

On doit avoir x^n partout. Pour cela, on fait un changement d'indice dans les 2ème et 4ème termes. On pose $N = n+2$, donc $n = N-2$

$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{N=3}^{+\infty} 2(N-2) a_{N-2} x^N + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{N=2}^{+\infty} 2a_{N-2} x^N - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

(Pour s'en convaincre $\sum_{N=2}^{+\infty} 2a_{N-2} x^N = 2a_0 x^2 + 2a_1 x^3 + \ldots$
$= \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} x^n = \sum_{k=2}^{\infty} 2a_{k-2} x^k$)

Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} 2(n-2) a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

On veut tout mettre sous un seul Σ, il faut donc tout ramener au m^{ê} indice de départ

or $\sum_{n=3}^{+\infty} 2(n-2) a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-2) a_{n-2} x^n$, on va donc tout ramener à 2

$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1) a_n - 2(n-2) a_{n-2} + n a_n - 2a_{n-2} - a_n \right) x^n + \underline{a_1 x} - a_0 - \underline{a_1 x} = 0$

Donc $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 2$

$(n(n-1) a_n - 2(n-2) a_{n-2} + n a_n - 2a_{n-2} - a_n) = 0$

càd $a_n (n(n-1) + n - 1) = 2((n-2) + 2) a_{n-2}$

càd $a_n (n^2 - 1) = 2(n-1) a_{n-2}$

ou encore $a_n(n-1)(n+1) = 2(n-1)a_{n-2}$ $n \geq 2$

$\Rightarrow$ $a_n = \frac{2a_{n-2}}{n+1}$

donc $a_2 = \frac{2a_0}{3} = 0$ $a_3 = \frac{2a_1}{4} = \frac{a_1}{2}$

$a_4 = \frac{2a_2}{5} = 0$ $a_5 = \frac{2a_3}{6} = \frac{a_3}{3} = \frac{a_1}{2\times 3}$

$a_6 = 0$ $a_7 = \frac{2a_5}{8} = \frac{a_5}{4} = \frac{a_1}{2\times 3\times 4}$

$\vdots$

Hyp. de récurrence ; $\forall p \geq 1$ $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}$

C'est vrai pour $p = 1, 2$ et 3

Si c'est vrai pour $P \in \omega$ alors

$a_{2p+2} = \frac{2a_{2p}}{2p+3} = 0$ et $a_{2p+3} = 2\frac{a_{2p+1}}{2p+4} = \frac{1}{p+2} \cdot \frac{a_1}{(p+1)!} = \frac{a_1}{(p+2)!}$

Donc c'est vrai $\forall p \geq 1$

Donc $f(x) = a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$

Pour étudier le rayon de cv de cette série, on pose $X = x^{2p}$ et on étudie

$\sum \frac{X^p}{(p+1)!}$: $\frac{(p+1)!}{(p+2)!} = \frac{1}{p+2} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

donc le rayon de cv de $a_1 \times \sum \frac{x^{2p}}{(p+1)!}$ est $+\infty$.