

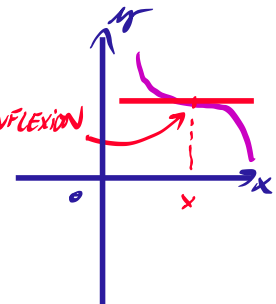
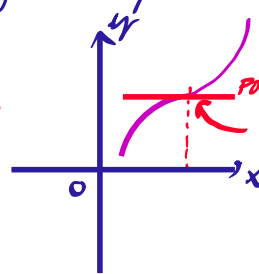
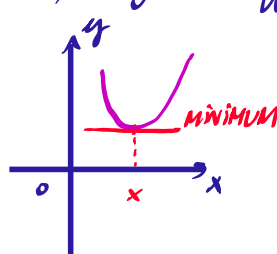
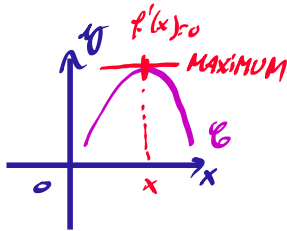
9 septembre 2025

Propriétés sur les dérivées :

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$

- $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante
- $f'(x) < 0$ " " " " strictement décroissante
- $f'(x) = 0$ alors f est constante

Attention : Si $f'(x) = 0$ pour "un x isolé", on ne peut pas conclure directement, il y a en effet 4 cas possibles



Propriétés :

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

NOUVEAUTÉ : dérivée d'une fonction composée

Question : qu'est-ce qu'une fonction composée ?

Exemple :

1. $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

$$x \xrightarrow{\cos} \cos x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\cos(x)}$$

2. $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

$$x \xrightarrow{x \mapsto 3x+2} 3x+2 \xrightarrow{x \mapsto \frac{1}{x}} \frac{1}{3x+2}$$

De manière générale: soient f_1 et f_2 deux fonctions

$$\text{On pose } x \xrightarrow{f_1} f_1(x) \xrightarrow{f_2} f_2(f_1(x)) = f(x)$$

Donc $f(x) = f_2(f_1(x))$ On le note $f(x) = f_2 \circ f_1(x)$ ↗ ROND

Exemples: si $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto \sin x$

a. Que vaut $f_2 \circ f_1(x)$? $x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x} \xrightarrow{\sin} \sin(\sqrt{x})$ donc $f_2 \circ f_1(x) = \sin(\sqrt{x})$

b. Que vaut $f_1 \circ f_2(x)$?

$$x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\sin x}$$

$$x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{\sin x} \text{ donc } f_1 \circ f_2(x) = \sqrt{\sin x}$$

Attention! L'ordre compte! c'est à dire que $f_1 \circ f_2(x) \neq f_2 \circ f_1(x)$

Question : quelle est la dérivée d'une fonction composée?

On pose $f = f_2 \circ f_1$ c'est à dire que $f(x) = f_2(f_1(x))$

$$\text{alors } f'(x) = (f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

Exemple: si $f_1 = \sqrt{}$ et $f_2 = \sin$

① $f_2 \circ f_1(x) = \sin(\sqrt{x})$ alors $(f_2 \circ f_1)'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

② $f_1 \circ f_2(x) = \sqrt{\sin x}$ alors $(f_1 \circ f_2)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$



Exercice: soit u une fonction $u: x \mapsto u(x)$

Que vaut la dérivée de:

② u^2 ③ $\sqrt{u}$ ④ e^u ⑤ $\ln u$?

② $x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} u^2(x)$ $u^2(x)' = 2u(x) \times u'(x)$

$u^2(x) = f_2(f_1(x))$ donc $(u^2)'(x) = \underbrace{f_2'(f_1(x))}_{2u(x)} \cdot f_1'(x)$
 $ \phantom{\underbrace{f_2'(f_1(x))}_{2u(x)}} \cdot u'(x)$

③ $x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} \sqrt{u(x)}$ $\sqrt{u(x)}' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$
 $\phantom{x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} \sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

④ $x \xrightarrow{f_1} u(x) \xrightarrow{f_2} e^{u(x)}$ $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

$$c) \quad x \mapsto u(x) \mapsto e \quad (e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$d) \quad x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\ln} \ln(u(x)) \quad \ln(u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Pour résumer:

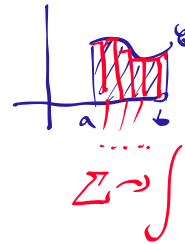
$$\begin{aligned} (u^2)' &= 2u \cdot u' & \sin(u)' &= \cos(u) \cdot u' \\ (\sqrt{u})' &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' & \cos(u)' &= -\sin(u) \cdot u' \\ (e^u)' &= e^u \cdot u' \\ (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \end{aligned}$$

6. Primitives

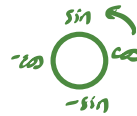
Définition Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) avec f continue sur I
une primitive de f sur I est une fonction F , dérivable sur I , telle que

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I$$

On la note $F(x) = \int f(x) dx$



Exemple: si $f(x) = \cos(x)$
 $\int f(x) dx = \int \cos(x) dx = \sin(x)$ une primitive



Propriété attention, les primitives sont définies à une constante près!
c-à-d que les primitives de f s'écrivent $F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante

Preuve: Soient F_1 et F_2 deux primitives de f

Par définition, $F_1'(x) = f(x)$

$$- F_2'(x) = f(x)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0$$

si une dérivée est nulle
la fonction est constante

Par conséquent $(F_1 - F_2)(x) = c$ (constante)

$$\Leftrightarrow F_1(x) - F_2(x) = c \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c$$

Quelques primitives connues

f	F
k	$kx + c$
x	$\frac{x^2}{2} + c$
x^2	$\frac{x^3}{3} + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x^2)' \leadsto \frac{1}{2} 2x \\ (\frac{1}{2}x^2)' \leadsto x \\ (\frac{1}{3}x^3)' \leadsto \frac{1}{3} 3x^2 \end{array} \right.$$

Propriété des primitives:

$$\textcircled{1} \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constante}}}{k} \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\textcircled{2} \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\textcircled{3} \int (f'g + fg')(x) dx = \int (fg)'(x) dx = (fg)(x) + C = f(x)g(x) + C$$

$$\textcircled{4} \int \left(\underset{\text{a2}}{f'g - fg'} \right)(x) dx = \int \left(\frac{f}{g} \right)'(x) dx = \left(\frac{f}{g} \right)(x) + C$$

$$\textcircled{4} \int \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right)(x) dx = \int \left(\frac{f}{g} \right)'(x) dx = \left(\frac{f}{g} \right)(x) + C = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

$$\textcircled{5} \int f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) dx = \int (f_2 \circ f_1)'(x) dx = f_2 \circ f_1(x) + C = f_2(f_1(x)) + C$$

Example : $\textcircled{1} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C$

$$\textcircled{2} \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)} dx = \ln |\sin(x)| + C$$

$$\textcircled{3} \int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

$$\textcircled{4} \int x^2 e^{x^3} dx = \int \frac{1}{3} (3x^2) e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int \overset{u' e^u}{3x^2 e^{x^3}} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$\textcircled{5} \int \frac{3}{2\sqrt{3x+5}} dx =$$

f	F
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

