INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : EDO numériques
Printemps 2021

Série d'exercices
Résolution numérique des équations différentielles

Exercice 1. Schéma d'Euler explicite.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t,x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) &=& x_0, \end{array}\right.$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
2. Jusqu'à quel ordre ce schéma est-t-il convergent ?
3. Applications :
   pour les deux problèmes suivants :

$$\text{A.}\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& t\sin(x(t)), \quad t \in [0,T], \\ x(0) &=& \dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right. \quad \text{et B.}\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& t^2+x+1, \quad t \in [1,T], \\ x(1) &=& 1. \end{array}\right.$$

   (a) Écrire le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
   (b) Écrire les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
   (c) Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Exercice 2. Schémas explicites du point milieu et schéma des trapèzes (Heun).
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t,x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) &=& x_0, \end{array}\right.$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

1. Construire le schéma du point milieu explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
2. Construire le schéma des trapèzes explicite à pas de temps constant correspondant à ce problème.
3. Jusqu'à quel ordre ces schéma sont-ils convergents ?

<u>Exercice 3.</u> Schéma d'Euler implicite.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

où $t_0, T\ x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ sont donnés.
On suppose de plus qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

1. Le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant est-il A-stable ?
2. Écrire le schéma d'Euler implicite en prenant un pas de temps constant.
3. Ce schéma d'Euler implicite à pas constant est-il A-stable ?

<u>Exercice 4.</u> Asymptotique, raideur & schéma implicite.
Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x'(t) = -ax(t) + b), \tag{1}$$

1. (a) Donner explicitement x.
   (b) Quel est le comportement de $x(t)$ quand $t \to +\infty$?
2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
   (a) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (1).
   On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,h)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.
   (b) Donner explicitement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit x_0, x_n tende quand $n \to +\infty$ vers $\lim_{t\to\infty} x(t)$?
   (d) On suppose cette condition satisfaite.
   Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $x_{|[0,10]}$.
   Quel est ce nombre lorsque $a = 100$?
   (e) Répondre à $(a) - (c)$ en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

Exercice 5. **Schéma de Runge-Kutta.**

1. Reconnaître les schémas suivants.
   (a) Le schéma représenté par

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

   (b) Le schéma représenté par

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

   (c) Le schéma représenté par

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

   (d) Développer sous la forme d'un schéma explicite le schéma représenté par :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

2. (a) Développer sous la forme d'un schéma explicite le schéma représenté par :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

   (b) Ce schéma est-il d'ordre au moins 2 ?

Exercice 6. **Examen 2017 - Exercice 1 - 60 min - 18 points.**
On considère le problème de Cauchy suivant : trouver $u \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$(\mathscr{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & -100u(t) + 25, \\ u(0) & = & 1, \end{array} \right.$$

1. **Partie 1 : solution exacte de** $(\mathscr{S}_1)$ **(5 points)**
   (a) (1.5 point) Donner l'ordre de l'équation de ce système et dire si elle est linéaire ou non, autonome ou non ? Justifier votre réponse.
   (b) (1 point) Ce système admet-il une solution globale unique pour $t \in [0,1]$? Justifier.
   (c) (1.5 point) Donner la solution exacte de $(\mathscr{S}_1)$.
   (d) (1 point) Vers quoi tend la solution quand t tend vers l'infini ?
2. **Partie 2 : schéma d'Euler explicite (7 points)**
   (a) (1 point) Écrire le schéma explicite pour $(\mathscr{S}_1)$.

(b) (2 points) Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

(c) (1 point) En déduire u_n en fonction de n et de h.

(d) (1 point) On suppose $h = 1/25$. Calculer u_n, puis $\lim_{n \to +\infty} |u_n|$.

(e) (1 point) Que peut-on conclure pour la A-stabilité de ce schéma ?

(f) (1 point) Quelle valeur de $h > 0$ maximale faut-il choisir pour que $\lim_{n \to +\infty} |u_n|$ soit finie ?

3. **Partie 3 : schéma d'Euler implicite (6 points)**
   Reprendre les questions (a) à (e) de la partie 2, en remplaçant schéma explicite par schéma implicite. La question f a-t-elle un sens ici ? Justifier vos réponses.