Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques

Série n1 :
Rappels : comparaison locale, limsup, liminf, structure de $\mathbb{R}$, suites dans $\mathbb{R}$, suites dans $\mathbb{C}$

Exercice I : Structure de $\mathbb{R}$

1. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $P = AB = \{x = ab,\ a \in A,\ b \in B\}$. Est-ce que $\sup(P)$ existe ? Si oui, est-ce que $\sup(P) = \sup(A)\sup(B)$?
   (b) Soit $S = A + B = \{x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Est-ce que $\sup(S)$ existe ? Si oui, est-ce que $\sup(P) = \sup(A) + \sup(B)$?
   (c) Soit $-A = \{-a, a \in A,\}$ Montrer que $-A$ admet une borne $\inf$ et que $\inf(-A) = -\sup(a)$.
2. (a) Montrer que pour tous $q_1,\ q_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $q_1 < q_2$, il existe $q_3 \in \mathbb{Q}$ tel que $q_1 < q_3 < q_2$.
   (b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et pour tout $q_1 \in \mathbb{Q}$ tels que $q_1 < r$ il existe $q_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $q_1 < q_2 < r$.
   (c) Soit $M_1 \in \mathbb{Q}$. Montrer que si $M_1 < \sqrt{2}$, il existe $M_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $M_1 < M_2 < \sqrt{2}$ et si $M_1 > \sqrt{2}$, il existe $M_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $M_1 > M_2 > \sqrt{2}$.
   (d) En déduire que $E = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x^2 < 2\ \}$ n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$.

Exercice II : Suites dans $\mathbb{R}$

1. On considère une suite réelle vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto (x + 2/x)/2$
   (a) Déterminer les réels l vérifiant $l = f(l)$.
   (b) Montrer que si $x > \sqrt{2}$ alors $f(x) > \sqrt{2}$ et si $x < -\sqrt{2}$ alors $f(x) < -\sqrt{2}$.
   (c) Montrer que si $u_0 = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée de nombres rationnels, et que si $u_0 = -2$, c'est une suite croissante et majorée.
   (d) Montrer que si $u_0 = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

2. (a) Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui soit de Cauchy mais qui n'ait pas de limite dans $\mathbb{Q}$.
   (b) Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui soit décroissante et minorée mais qui n'ait pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Exercice III : Comparaison locale de fonctions

1. Est-ce que $]-1,0[\cup]0,1[$ est un voisinage de 0 ? Un voisinage pointé ?
   Soient f, g, et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage pointé de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Montrer que
   (a) si $g =_{x_0} o(h)$ alors $fg =_{x_0} o(fh)$,
   (b) si $f \sim_{x_0} g$ et $h =_{x_0} o(f)$ alors $h =_{x_0} o(g)$,
   (c) si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$ alors $f =_{x_0} o(h)$.
2. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + 1/x$. Dire si $f \sim_{+\infty} g$: $g(x) = x^4$, $g(x) = 2x^4$, $g(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x^4 + 1/x$.
3. Vrai ou faux ?
   $x \sim_0 0$, $x =_0 o(1)$, $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$, $\sin(x) =_0 x + o(x)$, $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$, $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$, $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$, $\ln(1+x) - x =_0 o(1)$.
4. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x} \tan(1/x^2)$,
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(x)}\right)}$.

Exercice IV : Limites de suites réelles

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Traduire pour la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chacun des énoncés ci-dessous :
   (a) Il existe $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \mathbb{N}$ implique que $|u_n - l| < \varepsilon$.
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \mathbb{N}$ implique que $|u_n - l| < \varepsilon$.
   (c) Il existe $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ $n \geq \mathbb{N}$ implique que $|u_n - l| < \varepsilon$.
2. Calculer les limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n + n^{10\,000}}{n^{10\,000+1}}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-2} + \ln(n) + n^{1/2}}{\pi n^{1/2} + 1}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ (cette dernière limite est à connaître PARFAITEMENT - démonstration comprise !).

Exercice V : Limsup

1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
   (a) Déterminer ses valeurs d'adhérence.
   (b) Déterminer sa limite supérieure et sa limite inférieure.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées.
   (a) Comparer $\limsup_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ et $\limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Donner un exemple pour lequel $\limsup_{n\to+\infty}(u_n+v_n) < \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice VI : Convergence

1. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et pour tout $n \in N$, $x_{n+1} = f(x_n)$, où $f : x \mapsto 2 - x/(1+x)$.
   (a) En étudiant f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1, 2]$.
   (b) Montrer qu'il existe un seul réel $l \in [1, 2]$ tel que $l = 2 - l/(1 + l)$.
   (c) En utilisant le théorème des accroissements finis (dont on rappellera l'énoncé), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - l| \leq |x_n - l|/4$.
   (d) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
2. (Suites adjacentes) Soient $p > q > 0$. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$u_n = \frac{pu_{n-1} + qv_{n-1}}{p+q}, \quad v_n = \frac{qu_{n-1} + pv_{n-1}}{p+q},$$
   et u_1, v_1 donnés tels que $v_1 > u_1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n > 0$.
   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite. Notons l cette limite.
   (c) Montrer que $l = (u_1 + v_1)/2$.

Exercice VII : Suites Complexes

1. On considère les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -ay_n, \\ y_{n+1} = ax_n, \end{cases} \quad \text{avec } a > 0.$$
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = ae^{i\pi/2} z_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = a^n |z_0|$.
   (c) En déduire que si $0 < a < 1$, $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$ et que si $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$. Etudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ces deux cas.
   (d) On suppose maintenant que $a = 1$. Montrer que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais pas $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On considère la suite complexe définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{in\pi}{4}\right)$. Etudier la convergence de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.