Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques

Série n°1 :
Rappels : comparaison locale, limsup, suites dans $\mathbb{C}$

Comparaison locale de fonctions :

1. Est-ce que $]-1,0[\cup]0,1[$ est un voisinage de 0 ? Un voisinage pointé ?

   Soient f, g, et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage pointé de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Montrer que

   (a) si $g =_{x_0} o(h)$ alors $fg =_{x_0} o(fh)$,

   (b) si $f \sim_{x_0} g$ et $h =_{x_0} o(f)$ alors $h =_{x_0} o(g)$,

   (c) si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$ alors $f =_{x_0} o(h)$.

2. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + 1/x$. Dire si $f \sim_{+\infty} g$: $g(x) = x^4$, $g(x) = 2x^4$, $g(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x^4 + 1/x$.

3. Vrai ou faux ?
   $x \sim_0 0$, $x =_0 o(1)$, $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$, $\sin(x) =_0 x + o(x)$, $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$, $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$, $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$, $\ln(1+x) - x =_0 o(1)$.

4. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x} \tan(1/x^2)$,

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(x)}\right)}$.

Lim sup:

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

(a) Déterminer ses valeurs d'adhérence.

(b) Déterminer sa limite supérieure et sa limite inférieure.

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées.

   (a) Comparer $\limsup\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   (b) Donner un exemple pour lequel $\limsup\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) < \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Suites complexes :

7. On considère les deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -ay_n, \\ \\ y_{n+1} = ax_n, \end{cases} \quad \text{avec } a > 0.$$

   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = ae^{i\pi/2}z_n$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = a^n|z_0|$.

   (c) En déduire que si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$ et que si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$. Etudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ces deux cas.

   (d) On suppose maintenant que $a = 1$. Montrer que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais pas $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. On considère la suite complexe définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\exp\left(\dfrac{in\pi}{4}\right)$. Etudier la convergence de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

TD 1 - Math III-1 Analyse   correction

Comparaison locale de fonctions :

Rappel : . V voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$

. V voisinage pointé de $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi $V \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0

C'est sur des voisinages pointés qu'on définit les $\sim$, o, O : càd pour des fonctions définies au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.

. V voisinage (et voisinage pointé) de $+\infty$ ssi $\exists A \in \mathbb{R}$ t.q. $]A, +\infty[\subset V$. Pareil pour $-\infty$.

. Pour f, g définies sur un voisinage pointé de x_0 (x_0 fini ou infini)

* $f \underset{x_0}{\sim} g$ ssi $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ sur un voisinage pointé de x_0 avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ssi $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ sur un voisinage pointé de x_0 avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

On dit que f est négligeable devant g.

* $f \underset{x_0}{=} O(g)$ ssi $\exists M > 0$ t.q. $|f(x)| < M|g(x)|$ sur un voisinage pointé de x_0.

On dit que f est dominée par g

Si g ne s'annule pas sur un voisinage pointé de x_0, le sens de ces 3 notions est plus clair :

* $f \underset{x_0}{\sim} g$ signifie que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$

* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ " " $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

* $f \underset{x_0}{=} O(g)$ " " $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ est borné

Ex. $\boxed{I}$

. $]-1,0[\cup]0,1[$ n'est pas un voisinage de 0, mais c'est un voisinage pointé

a. $g \underset{x_0}{=} o(h)$ signifie que sur un voisinage pointé de x_0, $g(x) = h(x)\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$

Alors sur un voisinage pointé de x_0, $f(x)g(x) = f(x)h(x)\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$
et donc $fg \underset{x_0}{=} o(fh)$

b. On a, sur un voisinage pointé de x_0 :
$f(x) = g(x)\,\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$ et $h(x) = f(x)(1+\varepsilon_2(x))$ avec $\varepsilon_2(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$

Donc $h(x) = g(x)\,\varepsilon_1(x)(1+\varepsilon_2(x))$ et on a $\varepsilon_1(x)(1+\varepsilon_2(x)) \underset{x \to x_0}{\to} 0$
donc $h \underset{x_0}{=} o(g)$

c. On a, sur un voisinage pointé de x_0, $f(x) = g(x)\,\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$
et $|g(x)| \leq M|h(x)|$ $(M > 0)$

On en déduit que sur ce voisinage pointé, si $h(x) = 0$ alors $g(x) = 0$
et donc $f(x) = 0$.
Donc on peut écrire $f(x) = h(x)\,\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{h(x)}\cdot\varepsilon_1(x) & \text{si } h(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } h(x) = 0 \end{cases}$

on a alors $|\varepsilon_2(x)| \leq \frac{|f(x)|}{|h(x)|} \leq \frac{|g(x)|}{|h(x)|}\cdot|\varepsilon_1(x)| \leq M|\varepsilon_1(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

Donc $f \underset{x_0}{=} o(h)$

Ex. $\boxed{2}$

* $\dfrac{x^4+\cos x+1/x}{x^4} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ donc $x^4+\cos(x)+\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x^4$

* $\dfrac{x^4+\cos(x)+1/x}{2x^4} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 1$ donc $x^4+\cos(x)+\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\not\sim} 2x^4$

ici f et g tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ "à la même vitesse" et le rapport tend vers une constante, mais il faut que cette constante soit 1 pour parler d'équivalents.

* $\dfrac{x^4+\cos(x)+1/x}{x^4+1} = \dfrac{x^4\left[1+\frac{\cos x}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right]}{x^4\left[1+\frac{1}{x^4}\right]} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

donc $x^4+\cos x+\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x^4+1$

On peut donc trouver plusieurs équivalents d'une même fonction

* $\dfrac{x^4+\cos x+\frac{1}{x}}{x^4+\frac{1}{x}} = \dfrac{x^4+\frac{1}{x}}{x^4+\frac{1}{x}}\left[1+\dfrac{\cos x}{x^4+1/x}\right] \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

car $\dfrac{\cos x}{x^4+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (cos est bornée et $x^4+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$)

donc $x^4+\cos x+\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x^4+\frac{1}{x}$

Ex $\boxed{3}$ * $x \underset{0}{\sim} 0$: $\boxed{\text{Faux}}$ On ne peut pas trouver $\varepsilon(x)$ t.q. $x = 0.\varepsilon(x)$ sur un voisinage pointé de 0.

Aucune fonction n'est équivalente à 0 à part $f \equiv 0$

* $x = 1.\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = x$. ~~Donc~~ On a bien $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $x \underset{0}{=} o(1)$. Un $o(1)$ est simplement une fonction qui tend vers 0

* $\dfrac{x^3}{x^3+x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ donc $x^3 \underset{+\infty}{\neq} o(x^3+x^2)$ (même si $x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

* $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$? signifie $\sin(x) - x \underset{0}{=} o(x)$?

Comme x ne s'annule pas au voisinage pointé de 0, cela signifie

$\dfrac{\sin(x)-x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$? or $\dfrac{\sin x}{x} - 1 = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} - 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \cos(0) - 1 = 0$

Donc on a bien $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$

En pratique, on ne le redemontre jamais, il faut connaître le DL de $\sin(x)$ en 0.

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

* $1 \underset{0}{=} \cos(x) + o(x^2)$ signifie $1 - \cos(x) \underset{0}{=} o(x^2)$? ou encore

$\cos(x) - 1 \underset{0}{=} o(x^2)$?

Il faut aussi connaître le DL de $\cos(x)$ en 0

$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Donc $\cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Donc $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ Donc $\cos(x) - 1 \underset{0}{\neq} o(x^2)$

Sinon d'après l'exo 1.6. on aurait $-\frac{x^2}{2} \underset{0}{=} o(x^2)$ ce qui n'est pas vrai

On voit parfois dans les livres, des énoncés du type $o(f)+o(f)=o(f)$.
Ça signifie que si $g \underset{x_0}{=} o(f)$ et $h \underset{x_0}{=} o(f)$ alors $g+h \underset{x_0}{=} o(f)$

et c'est vrai parce que si $g(x) = f(x)\,\varepsilon_1(x)$ $\left(\varepsilon_1(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0\right)$
et $h(x) = f(x)\,\varepsilon_2(x)$ $\left(\varepsilon_2(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0\right)$

alors $g(x)\,h(x) = f(x)\left[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right]$ et on a $\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$

* Si $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$ et $g(x) \underset{0}{=} o(x)$ alors $f(x) = x^2\varepsilon_1(x)$
et $g(x) = x\,\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$

Alors $f(x)+g(x) = x\left(x\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)$ et $x\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$
donc $f+g \underset{0}{=} o(x)$.
Donc on a bien $o(x^2)+o(x) \underset{0}{=} o(x)$

* Le DL de $\ln(1+x)$ en 0 est $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
Donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} o(x)$ or $x \underset{0}{=} o(1)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} o(1)$

Ex $\boxed{4}$

a. $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$

b. $\dfrac{x^6+\cos x+1}{x^4+x}\tan\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^6}{x^4}\cdot\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

c. ⚠ attention $\dfrac{2}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$ et $\dfrac{1}{1-\cos x} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$

et pourtant $\dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\not\to} 0$!!!

$$\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{\sin^2(x)(1-\cos x)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{\sin^2 x(1-\cos x)}\left[2\left(1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right]$$

$$= \frac{x^2-\frac{x^4}{12}+o(x^4)-\left(x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)}{\sin^2(x)(1-\cos x)}$$

$$= \frac{x^4/3 - x^4/12 + o(x^4)}{\sin^2(x)(1-\cos(x))} \underset{0}{\sim} \frac{x^4/4}{x^2\,x^2/2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Il ne faut PAS ajouter les équivalents

d. Il ne faut pas non plus composer les équivalents

$\exp\left(\dfrac{2}{\sin^2(x)}\right) \underset{0}{\not\sim} \exp\left(\dfrac{1}{1-\cos(x)}\right)$ même si $\dfrac{2}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{1-\cos(x)}$!!

$$\frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(x)}\right)} = \exp\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} e^{1/2} \neq 1 \text{ !!}$$

Rappel : La relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$ permet de définir la lim sup et la lim inf d'une suite réelle. L'intérêt est que la lim sup et la lim inf existent toujours dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ contrairement à la limite.

. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Par définition $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$

(la suite $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), elle admet donc une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

De même, $\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k$ (la suite $(\inf_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante)

. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a.

. $\limsup_{n\to\infty} u_n$ est égale à la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

et $\liminf_{n\to\infty} u_n$ — à la plus petite valeur — —

Ex $\boxed{5}$

a. Pour $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}$ on a $u_{3p} = (1 - \frac{1}{3p}) \sin(2\pi p) = 0 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

Donc 0 est valeur d'adhérence

Pour $n = 3p+1$, $p \in \mathbb{N}$ $u_{3p+1} = (1 - \frac{1}{3p+1}) \sin(2\pi p + \frac{2\pi}{3}) = (1 - \frac{1}{3p+1}) \sin(\frac{2\pi}{3})$

$= (1 - \frac{1}{3p+1}) \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[p\to\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est valeur d'adhérence

* Pour $n = 3p+2$, $p \in \mathbb{N}$

$$u_{3p+2} = \left(1 - \frac{1}{3p+2}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3p+2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \xrightarrow[p \to \infty]{} \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Donc $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur d'adhérence.

Montrons qu'il n'y en a pas d'autre :

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ différent de $0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2$

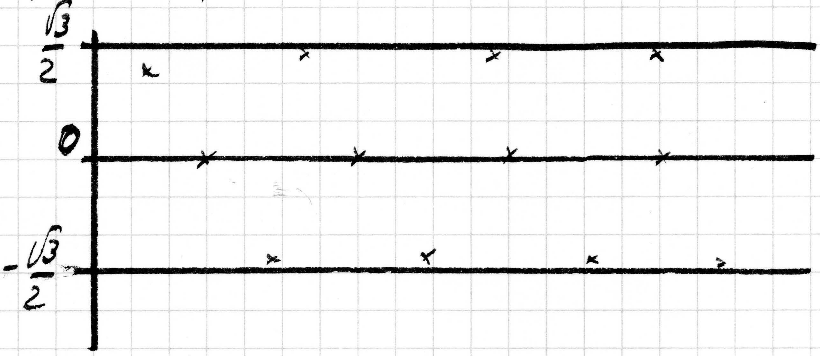
Alors on peut trouver un voisinage de a ne contenant ni 0, $\sqrt{3}/2$ et $-\sqrt{3}/2$.

S'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers a, alors à partir d'un certain rang, tous les termes de cette sous-suite sont dans V.

Alors à partir d'un certain rang il ne sont pas de la forme u_{3p} car $u_{3p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \notin V$

De même ils ne sont pas de la forme u_{3p+1} ni u_{3p+2}

On ne peut donc pas trouver de sous-suite qui tende vers a.



6. $\limsup_{n \to \infty} u_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (la + grande valeur d'adhérence)

et $\liminf_{n \to \infty} u_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (la plus petite)

Ex $\boxed{6}$ a. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sup\{u_k + v_k,\ k \geq n\} \leq \sup\{u_k,\ k \geq n\} + \sup\{v_k,\ k \geq n\}$

Donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n$$

b. Si l'on prend $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -(-1)^n$

alors $u_n + v_n = 0$ donc $\limsup_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0$

et $\limsup_{n\to\infty} (u_n) = 1 = \limsup_{n\to\infty} v_n$

Ex. $\boxed{7}$

a. $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1} = -a y_n + i a x_n$

Or $a e^{i\pi/2} z_n = a i z_n = a i (x_n + i y_n) = i a x_n - a y_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1} = a e^{i\pi/2} z_n$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{n+1}| = |a e^{i\pi/2} z_n| = a |z_n|$

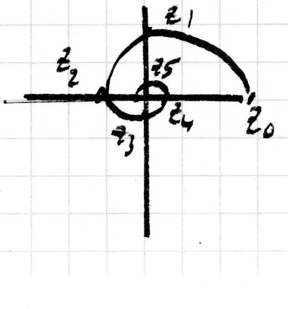
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = a^n |z_0|$. On peut considérer que c'est évident ou faire une récurrence (au choix)

c. Si $0 < a < 1$, $a^n |z_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

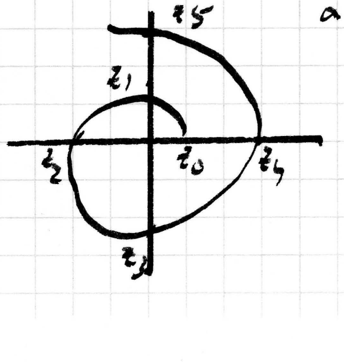
si $a > 1$ $a^n |z_0| \to +\infty$ Donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DIVERGE

Remarque : Multiplier par $a e^{i\pi/2}$ revient à faire une homothétie de a et une rotation de $\pi/2$

$0 < a < 1$



$a > 1$



d. Si $a=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $|z_n|=|z_0|=|1+i.0|=1$

Donc $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Par contre $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas !! En effet, supposons que si $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

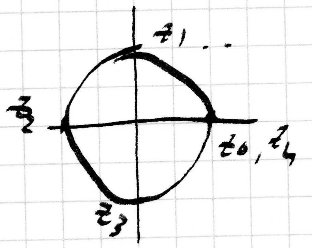
puisque $\forall n\in\mathbb{N}$ $z_{n+1}=e^{i\pi/2}z_n$, on aurait $l=e^{i\frac{\pi}{2}}l=il$

donc $l(1-i)=0$ donc $l=0$

Or si $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ alors $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$ donc $|l|=1$ donc $l\neq 0$

Contradiction :

$a=1$



Cet exercice permet d'illustrer le fait que les nombres complexes sont des outils pratiques pour décrire les rotations.

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $|u_n|=1-\frac{1}{n}$. Donc $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Pourtant on va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas !

Comme dans l'exercice précédent, exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=(1-\frac{1}{n})e^{in\pi/4}=\frac{n-1}{n}e^{in\pi/4}$ Donc $u_{n+1}=\frac{n}{n+1}e^{i(n+1)\pi/4}$

$$u_{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}e^{in\pi/4}e^{i\pi/4}=\frac{n^2}{n^2-1}u_n e^{i\pi/4}$$

Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. Alors puisque $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{n+1}=\frac{n^2}{n^2-1}u_n e^{i\pi/4}$

on a $l=le^{i\pi/4}$ donc $l(1-e^{i\pi/4})=0 \Rightarrow l=0$

ce qui est impossible car $|l|=\lim_{n\to\infty}|u_n|=1$

$\square$