Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Intro. analyse numérique L2- Printemps 2018

Série d'exercices n°2/5
Calculs approchés d'intégrales

Exercice 1. *Partiel 2017- Exercice - Parties 2 et 3*

1. **Partie 2. (6 points) (30 min)**
   On pose $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

   (a) (1 point) Justifier que l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ est bien définie et la calculer.

   (b) (1 point) Rappeler la formule de quadrature par la méthode de Simpson pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

   (c) (1 point) Donner la valeur de l'approximation de cette intégrale obtenue par la méthode de Simpson.

   (d) (1 point) Calculer l'erreur exacte en se servant du calcul explicite de I.

   (e) (1 point) Rappeler la formule de l'erreur de quadrature pour cette méthode. Donnez une estimation de l'erreur pour la fonction f de cette partie, et la comparer avec l'erreur calculée dans la question précédente.

   (f) (1 point) Est-ce que cela confirme ce que l'on savait sur l'ordre de cette méthode ?

2. **Partie 3. (4 points) (30 min)**

   (a) (2 points) On note z_1 et z_2 deux réels non nuls de $]-1, 1[$, tels que $z_1 < z_2$ et α, β, γ trois coefficients réels.
   Déterminer z_1, z_2, α, β et γ tels que l'expression

   $$G(f) = \alpha f(z_1) + \beta f(0) + \gamma f(z_2),$$

   soit une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 4 sur $[-1, 1]$.

   (b) (2 points) Cette méthode est-elle d'ordre 5 ? D'ordre 6 ?

Exercice 2. *Simpson*
Soit p la fonction polynôme de la variable réelle x définie par

$$p(x) = \frac{35}{16}x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 3.$$

1. Calculer l'intégrale
$$\int_{-2}^{2} p(x)dx.$$
2. Donner la valeur de l'approximation de cette intégrale obtenue par la méthode de Simpson appliquée aux intervalles successifs $[-2, 0]$ et $[0, 2]$. Donner une estimation de l'erreur.
3. On note $M(\varphi)$ l'approximation d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-2}^{2} \varphi(x)dx$:
$$M(\varphi) = \frac{8}{3}\varphi(-1) - \frac{4}{3}\varphi(0) + \frac{8}{3}\varphi(1).$$
   (a) Montrer que $M(\varphi) = \displaystyle\int_{-2}^{2} \varphi(x)dx$ si φ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
   (b) Comparer $M(p)$ et $\displaystyle\int_{-2}^{2} p(x)dx$.
4. On note $z_1 < z_2$ deux nombres réels distincts de $[-2, 2]$ et α, β et γ trois nombres réels.
   (a) Déterminer z_1, z_2, α, β et γ de telle sorte que si l'on pose
   $$N(\varphi) = \alpha\varphi(z_1) + \beta\varphi(0) + \gamma\varphi(z_2),$$
   nous ayons
   $$N(\varphi) = \int_{-2}^{2} \varphi(x)dx \text{ si } \varphi \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } 4.$$
   (b) Vérifier les résultats trouvés à l'aide du polynôme p.

Exercice 3. *Newton-Cotes*
Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Calculer les coefficients des formules suivantes

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \lambda_0 f(-\frac{1}{3}) + \lambda_1 f(\frac{1}{3})$, exacte pour $f \in \mathscr{P}_1$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \lambda_0 f(-\frac{3}{5}) + \lambda_1 f(-\frac{1}{5}) + \lambda_2 f(\frac{1}{5}) + \lambda_3 f(\frac{3}{5})$, exacte pour $f \in \mathscr{P}_3$.
3. Construire la formule composée correspondante à la première question avec des nœuds équidistants et trouver l'expression de l'erreur commise.

Exercice 4. *Formules de Gauss-Lobatto*
Dans ce type de formule de quadrature, les nœuds extrêmes sont imposés et égaux aux extrémités de l'intervalle d'intégration.
Pour $[a, b] = [-1, 1]$, la formule de Gauss-Lobatto à deux nœuds intérieurs approchant l'intégrale

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx,$$

s'écrit en tenant compte de la symétrie :

$$J(f) = \lambda\,(f(-1) + f(1)) + \mu\,(f(-\alpha) + f(\alpha)).$$

1. Calculer les valeurs de λ et μ pour avoir la formule d'ordre la plus élevée possible.
2. Quel est cet ordre ?

Exercice 5. *Méthode de Simpson*
Soient φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ un réel fixé. On considère la fonction $\psi : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [0, \alpha]$ par

$$\psi(t) = \int_{-t}^{t} \varphi(s)ds - \frac{t}{3}\,(\varphi(-t) + 4\varphi(0) + \varphi(t)) - kt^2,$$

où k est un réel défini par la condition $\psi(\alpha) = 0$. On suppose que $\varphi \in \mathscr{C}^4([-\alpha, \alpha])$.

1. Calculer pour tout $t \in [0, \alpha]$, $\psi'(t)$, $\psi''(t)$ et $\psi^{(3)}(t)$.
2. En utilisant le théorème de Rolle, successivement pour ψ, ψ' et ψ'' montrer qu'il existe $\theta \in]0, \alpha[$ tel que $\psi^{(3)}(\theta) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $\eta \in] - \alpha, \alpha[$ tel que k s'exprime en fonction de $\varphi^{(4)}(\eta)$.
4. Retrouver ainsi la formule d'intégration de Simpson pour φ sur un intervalle $[-\alpha, \alpha]$:
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(s)ds = \frac{\alpha}{3}\,(\varphi(-\alpha) + 4\varphi(0) + \varphi(\alpha)) - \frac{\alpha^5}{90}\varphi^{(4)}(\eta),\ \eta \in] - \alpha, \alpha[.$$
5. On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^{(4)}([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Soient $x_i = a+ih$, $i = 0, ..., n$ où $h = \dfrac{(b-a)}{n}$. En utilisant un changement de variable et la question précédente, retrouver la méthode d'intégration de Simpson pour f sur $[a, b]$, à savoir
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1})\right) + e(f),$$
où $e(f) = -\dfrac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(c)$ avec $c \in [a, b]$.

Exercice 6. *Méthode des trapèzes-Hermite*

1. Soient $\varphi \in \mathscr{C}^4([-1,1])$ et p_3 le polynôme d'Hermite de de φ de degré ≤ 3 vérifiant
$$\begin{array}{rclcrcl} p_3(-1) &=& \varphi(-1), & & p_3'(-1) &=& \varphi'(-1), \\ p_3(1) &=& \varphi(1), & & p_3'(1) &=& \varphi'(1). \end{array}$$
   (a) Déterminer l'expression du polynôme p_3
   (b) En déduire la formulation d'intégration numérique élémentaire suivante
$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)ds = \varphi(-1) + \varphi(1) + \frac{1}{3}\left(\varphi'(-1) - \varphi'(1)\right) + \frac{2}{45}\varphi^{(4)}(\eta), \text{ avec } \eta \in [-1,1].$$
2. En déduire la formule d'intégration numérique composée
$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f) + \frac{h^2}{12}\left((f'(a) - f'(b)\right) + \frac{h^4}{720}(b-a)f^{(4)}(c),$$
où $f \in \mathscr{C}^4([a,b])$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in [a,b]$ et $T_n(f)$ est la valeur obtenue par la méthode des trapèzes composés avec le pas h.