

24 septembre 2025 GROUPE 1

- Bonne nouvelle: dans toute la suite du cours, on n'étudiera que les EDO d'ordre 1, sous forme normale:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{NON AUTONOME}$$

ou

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{AUTONOME}$$

Exemple: MALTHUS

$$P'(t) = (\overset{\text{birth}}{b} - \overset{\text{death}}{d}) P(t) \quad : \text{ordre 1}$$

autonome
linéaire

si on pose $b-d=a$ l'EDO s'écrit $P'(t) = aP(t)$ (E)

sous forme normale

Comment résoudre (E)?

Comment résoudre (E)?

étape 1 : on met (E) sous la forme $P'(t) - aP(t) = 0$ (1)

étape 2 : ASTUCE

on multiplie l'équation (1) par $e^{\int -adt}$ (conseil : calculer d'abord $\int -adt$ puis mettre à l'exponentielle)

on obtient :

$$e^{-\int adt} P'(t) - a e^{-\int adt} P(t) = 0 \quad (2)$$

Rapels : ① $(\int -adt)' = -a$

② $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$

③ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

si on pose $f(t) = -\int adt$ alors $f'(t) = -a$

si on pose $u(t) = e^{f(t)} (= e^{-\int adt})$

$$u'(t) = f'(t)e^{f(t)} = -a e^{-\int adt}$$

(2) s'écrit alors sous la forme

$$u(t)P'(t) + u'(t)P(t) = 0 \quad \text{car } u(t) = e^{-\int adt}$$

④ $(u(t)P(t))' = 0$

⑤ $u(t)P(t) = k, \quad k = 0$

⑥ $e^{-\int adt} P(t) = k$

⑦ $\boxed{P(t)} = k e^{\int adt} = \boxed{k e^{at}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} P'(t) = aP(t) \\ \hookrightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = a \\ \ln|P(t)| = at + C \\ e^{\ln|P(t)|} = e^{at+C} \\ |P(t)| = e^{at+C} \\ = \frac{e^C}{k} e^{at} \end{array} \right.$$

Les solutions de $P'(t) = aP(t)$ s'écrivent $P(t) = k e^{at}$

pour trouver k : il faut donner une condition initiale ; ex : $P(t_0) = P_0 \in \mathbb{R}_+$

on remplace donc t par t_0 dans $P(t) = k e^{at}$

$$\text{on a : } P_0 = P(t_0) = k e^{at_0}$$

donc $\boxed{k = P_0 e^{-at_0}}$ et si $t_0 = 0$ ($P(0) = P_0$) alors $k = P_0$

Interprétation graphique:

$$a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{naissances}}}{b} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{morts}}}{d}$$

si $\boxed{b > d}$ (plus de naissances que de morts) $b - d > 0$ ou encore $a > 0$

$$P(t) = ke^{at}$$

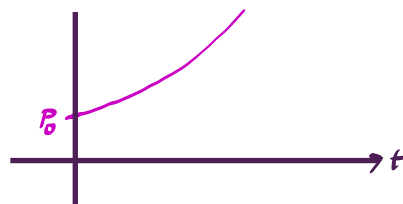
$$P(0) = P_0$$

$$\text{alors } P(t) = P_0 e^{at}$$

$\uparrow$ $P(t)$

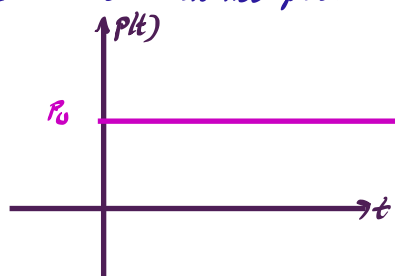
$\swarrow$ P_0

alors $P(t) = P_0 e^{at}$



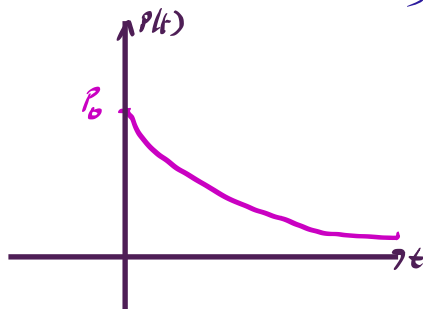
si $b=d$ $a=0$ (autant de naissances que de morts)

$$P(t) = P_0 e^{0t} = P_0$$



si $b < d$ $a < 0$ (moins de naissances que de morts)

$$P(t) = P_0 e^{at}$$



Méthode générale

Comment résoudre

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

? ordre 1,
pas autonome
linéaire

étape 1 : mettre sous la forme $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (1)

étape 2 : on multiplie (1) par $e^{\int a(t)dt}$

étape 3 on obtient $\underbrace{e^{\int a(t)dt} x(t)}_{u(t)} + \underbrace{a(t)e^{\int a(t)dt} x(t)}_{u'(t)} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\int a(t)dt} x(t) \right)' = 0$$

étape 4

$$\Leftrightarrow e^{\int a(t)dt} x(t) = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

donc

$$x(t) = k e^{-\int a(t)dt}$$

Exercices : Résoudre

① $x'(t) + t x(t) = 0$

② $x'(t) + \sin(t)x(t) = 0$

$$\textcircled{2} \quad x'(t) + \sin(t)x(t) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad tx'(t) + x(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\textcircled{1} \quad x'(t) + \underline{t}x(t) = 0 \quad \text{on multiplie par } e^{\int a(t)dt} \left(\text{or } \int a(t)dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} \right)$$

c'est à dire $e^{t^2/2}$

on obtient $(e^{t^2/2} x(t))' = 0$

donc $e^{t^2/2} x(t) = k$

Conclusion $x(t) = k e^{-t^2/2}$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$$\textcircled{2} \quad x'(t) + \sin(t)x(t) = 0 \quad \text{on multiplie par } e^{\int \sin(t)dt} \left(\text{or } \int \sin(t)dt = -\cos(t) \right)$$

ici ça vaut $e^{-\cos(t)}$

on obtient $(e^{-\cos(t)} x(t))' = 0$ autrement dit $e^{-\cos(t)} x(t) = k$

d'où $x(t) = k e^{\cos(t)}$

$$\textcircled{3} \quad tx'(t) + x(t) = 0 \quad (1) \quad t > 0$$

On divise (1) par t (on peut le faire car $t > 0$ ($t \neq 0$))

on obtient $x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = 0$

on multiplie par $e^{\int \frac{1}{t}dt}$ or $\int \frac{1}{t}dt = \ln|t|$ à $t > 0$ donc ça fait $\ln(t)$

c'est à dire $e^{\ln t} = t$

on obtient $tx'(t) + x(t) = 0$ c'est de la forme $(tx(t))' = 0$

soit $tx(t) = k$

soit $x(t) = \frac{k}{t}$

Remarque : si on a une EDO de la forme:

$$a(t)x'(t) + a'(t)x(t) = 0$$

on peut directement passer à l'étape (3): qui est:

$$(a(t) \cdot x(t))' = 0 \quad \text{et ensuite } a(t)x(t) = k$$

et $a(t) \neq 0$ sur I , $x(t) = \frac{k}{a(t)}$

Résolution de : $x'(t) + a(t)x(t) = g(t)$ ← nouveauté

étape ① on met sous la forme $\overset{\text{il y a}}{\uparrow} x'(t) + a(t)x(t) = g(t)$ (1)

étape ② on multiplie (1) par $e^{\int a(t)dt}$

étape ③ on obtient $(e^{\int a(t)dt} x(t))' = e^{\int a(t)dt} g(t)$

on intègre
(primaires)

$$\hookrightarrow e^{\int a(t)dt} x(t) + C_1 = \int e^{\int a(t)dt} g(t) dt + C_2$$

$$\hookrightarrow e^{\int a(t)dt} x(t) = \int e^{\int a(t)dt} g(t) dt + k \quad (\text{où } k = C_2 - C_1)$$

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-\int a(t)dt} \left(\int e^{\int a(t)dt} g(t) dt + k \right)$$

Exercice (1) $x'(t) + tx(t) = 3$

(2) $tx'(t) + x(t) = t$

(3) $\sin(t)x'(t) + \cos(t)x(t) = \cos(t)$ avec $t \in]0, \pi[$

(4) $x'(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} x(t) = 2 \quad t > 0$

Solution: (1) $x'(t) + t x(t) = 3$

On passe directement à l'étape ②: on multiplie l'équation par $e^{\int t dt} = e^{t^2/2}$

On obtient (étape ③) $(e^{t^2/2} \cdot x(t))' = 3 e^{t^2/2}$

étape ④ On intègre des 2 côtés:

$$e^{t^2/2} x(t) = 3 \int e^{t^2/2} dt + K$$

Conclusion: $x(t) = 3 e^{-t^2/2} \left(\int e^{t^2/2} dt + K \right)$

(2) $t x'(t) + \overset{\text{dérivée}}{1} x(t) = t, \quad t < 0$

On passe directement à l'étape ③: puisqu'on reconnaît la forme

$$(t \cdot x(t))' = t$$

étape ④ On intègre des 2 côtés, et on obtient:

$$t \cdot x(t) = \int t dt + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Donc $x(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{t^2}{2} + K \right) = \boxed{\frac{t}{2} + \frac{K}{t}}$ avec $t < 0$

Trouve K , si $x(-1) = 1$

$$x(\cdot) = \frac{-1}{2} + \frac{k}{-1} = \boxed{\frac{-1}{2} - k = 1} \text{ donc } k = \frac{-1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

Conclusion $x(t) = \frac{t}{2} + \frac{-3/2}{t} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2t} = \frac{t^2 - 3}{2t}$

$$(3) \quad \sin(t) x'(t) + \cos(t) x(t) = \cos(t) \quad t \in]0, \pi[$$

derivée

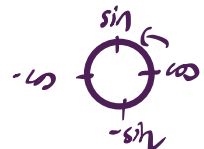
On passe directement à l'étape ③: (car $\sin'(t) = \cos(t)$)

On a alors

$$(\sin(t) \cdot x(t))' = \cos(t)$$

étape ④ On intègre des 2 cotés, et on obtient:

$$\sin(t) x(t) = \int \cos(t) dt + k$$



pour $t \in]0, \pi[$

$$e) \sin(t) x(t) = \sin(t) + k$$

On divise par $\sin(t)$ (on peut car $t \in]0, \pi[$ et $\sin(t) \neq 0$ sur $]0, \pi[$)

Alors
$$\boxed{x(t)} = \frac{\sin(t)}{\sin(t)} + \frac{k}{\sin(t)} = \boxed{1 + \frac{k}{\sin(t)}}$$

$$(4) \quad x'(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} x(t) = 2 \quad t > 0$$

étape (2) On multiplie par $e^{\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt} = e^{\sqrt{t}}$

étape (3) On obtient $(e^{\sqrt{t}} \cdot x(t))' = 2e^{\sqrt{t}}$

étape (4) On intègre des 2 côtés et on obtient

$$e^{\sqrt{t}} x(t) = 2e^{\sqrt{t}} + k$$

On divise par $e^{\sqrt{t}}$:
$$\boxed{x(t)} = \frac{2e^{\sqrt{t}}}{e^{\sqrt{t}}} + \frac{k}{e^{\sqrt{t}}} = \boxed{2 + \frac{k}{e^{\sqrt{t}}}}$$

Exercice : Dynamique de populations

Rappel: MALTHUS $P'(t) = aP(t)$ où $a = b - d$ (naissances - morts)

Étudions les solutions sans calculer la solution exacte, avec $a > 0$

Pour ça, on cherche les équilibres: On pose $P'(t) = f(P(t))$
on simplifie l'équation $\downarrow$ $P' = f(P)$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto aP$

Les équilibres P^* vérifient $P^{*'} = 0 \Leftrightarrow f(P^*) = 0$

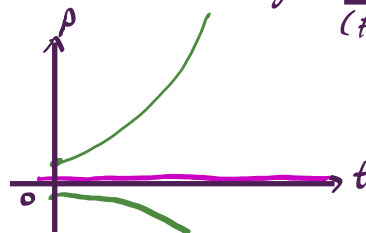
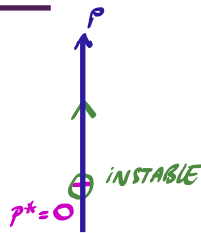
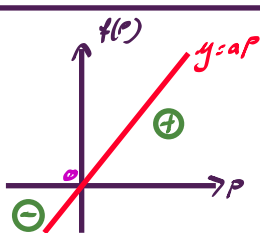
$$\Leftrightarrow \boxed{a \cdot P^* = 0}, \text{ avec } a > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P^* = 0}$$

On a donc un seul équilibre $\boxed{P^* = 0}$

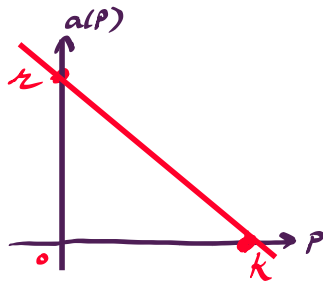
Étudions la stabilité de l'équilibre: on la détermine en étudiant le signe de $f(P)$:

$$(f(P) = aP) \\ a > 0$$





• VERHULST : $P'(t) = a(P) P(E)$



$a(P)$: droite

$$y = aP + b$$

$$= aP + r \quad (r = \text{ordonnée à l'origine})$$

$$\text{et } a = \frac{r-0}{0-k} = -\frac{r}{k} = -\frac{r}{k}$$

k : capacité de charge de l'environnement
carrying capacity

Ainsi $a(P) = -\frac{r}{k}P + r$

Dans l'équation différentielle on a : $P'(t) = a(P(t)) P(t)$

$$P' = a(P) \cdot P = \left(-\frac{r}{k}P + r\right) P$$

$$\boxed{P'} = \boxed{r\left(1 - \frac{P}{k}\right)P} \quad r, k > 0$$

Equation de VERHULST

$$\boxed{P' = r\left(1 - \frac{P}{k}\right)P} \quad \text{ou aussi equation LOGISTIQUE}$$

$$= f(P) \quad \text{avec } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto r\left(1 - \frac{P}{k}\right)P = r \cdot P - \frac{rP^2}{k}$$

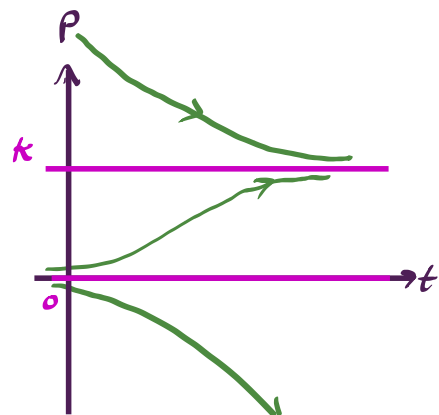
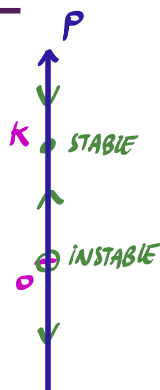
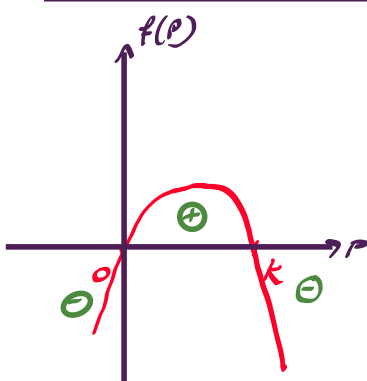
Cherchons les équilibres : les équilibres P^* veulent $P' = 0$

c'est à dire $f(P^*) = 0$ ou $f(P^*) = 0 \Leftrightarrow r\left(1 - \frac{P^*}{k}\right) \cdot P^* = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{P^*}{k} = 0 \text{ ou } P^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P^* = k} \text{ ou } \boxed{P^* = 0}$$

Étudions la stabilité des équilibres



I

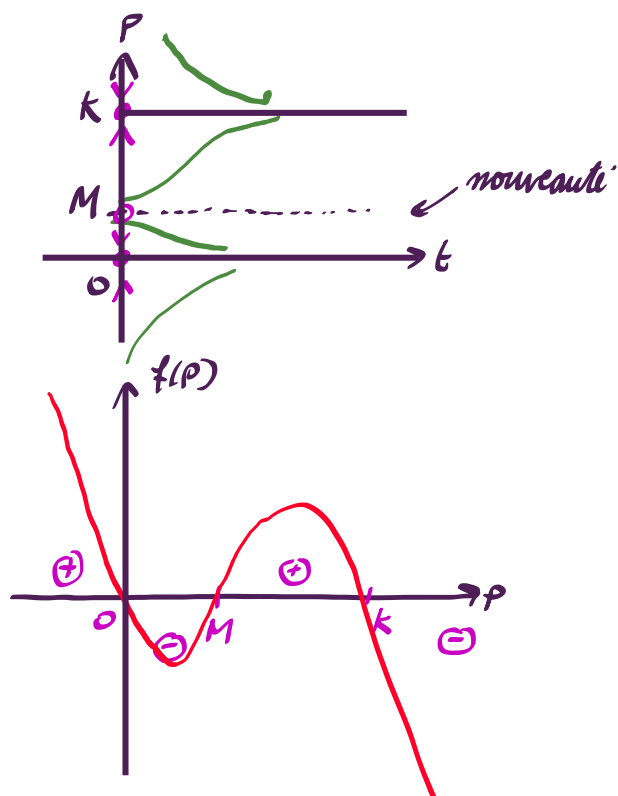
■

■

✓

Amélioration du modèle de VERHULST : ALICE
P

M, K



$$M, k > 0 \\ 0 \leq M \leq k$$

$$P' = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) \cdot P \cdot (M - P)$$

$\begin{matrix} -P/k & \cdot P & (M-P) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{tau} & & \end{matrix}$

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} f(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} -\frac{P^3}{k} = -\infty$$

on choisit $P-M$ de telle sorte

$$\text{que } \lim_{P \rightarrow +\infty} f(P) = \lim_{P \rightarrow +\infty} -\frac{P^3}{k} = -\infty$$

Conclusion

$$P' = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) P (P - M)$$

équation à effet ALUE

