Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L2- Printemps 2017

Série d'exercices n$^\circ$5/5
Révisions

Exercice 1. Étude de l'erreur relative.
On considère le problème de Cauchy suivant :
trouver y tel que

$$(\mathscr{S}_2) \begin{cases} y'(t) &= 3e^{0.5t} - 0.2y(t), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

pour $t \in [0, 4]$ avec un pas de temps de 1.

1. Donner la valeur exacte de la solution (si elle existe sur l'intervalle de définition) au problème de Cauchy $(\mathscr{S}_2)$. Justifier, si c'est possible, que l'on a bien existence et unicité des solutions.
2. Etudier la convergence et l'ordre de convergence de ce problème avec la méthode d'Euler explicite.
3. On rappelle que l'erreur relative en pourcentage peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon_t = |\frac{\text{valeur exacte} - \text{valeur approchee}}{\text{valeur exacte}}| \times 100.$$

   a. Faire un tableau de données pour le 5 valeurs t_0,...,t_4 où apparaîtront les valeurs exactes $y(t_i)$, les valeurs approchées par la méthode d'Euler explicite y_i, $i = 0, ..., 4$, et l'erreur relative correspondant à chacun de ces pas de temps.
   b. Faire un graphe représentant les différentes solutions exactes et approchées trouvées dans le $a.$.

Exercice 2. Ordre de convergence de schémas de Runge-Kutta.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$x(0) = x_0 \text{ et pour tout } t \in [0, T], T > 0, x'(t) = f(t, x),$$

où f est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable lorsque $t \in [0, T]$.

1. Montrer (en le détaillant), les résultats suivants.
   (a) pour qu'un schéma de Runge-Kutta explicite à un pas soit consistant au-moins d'ordre 1, il faut et il suffit que les points b_i, vérifient

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

(b) pour qu'un schéma de Runge-Kutta explicite à un pas soit au moins d'ordre 2, il faut et il suffit que les points b_i, les poids intermédiaires $a_{i,j}$ et les paramètres c_i $(i, j = 1, ..., s)$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^{s} b_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \right) = \frac{1}{2}.$$

(c) que doivent satisfaire les coefficients pour que le schéma soit d'ordre au moins 3 ? Détailler les calculs.

2. Application : vérifier que les schémas du point milieu et des Heun sont d'ordre au moins 2.

<u>Exercice 3.</u> *Vitesses de convergence.*
Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de normes d'erreurs associée à un méthode itérative.

1. On suppose que l'on dispose d'une estimation

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e_k \ \leq \ C\,(C')^k$$

avec $C = C' = \frac{1}{2}$.
Quel nombre k_0 d'itérations faut-il pour que l'estimation précédente garantisse $e_{k_0} \leq 10^{-8}$?
Indication numérique : $8\frac{\ln 10}{\ln 2} \in [26, 27[$.

2. On suppose désormais que l'on dispose d'une estimation

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e_k \ \leq \ C\,(C')^{2^k}$$

avec $C = 1$ et $C' = \frac{1}{2}$.
Quel nombre k_0 d'itérations faut-il pour que l'estimation précédente garantisse $e_{k_0} \leq 10^{-8}$?
Indication numérique : $\ln\left(8\frac{\ln 10}{\ln 2}\right) / \ln 2 \in [4, 5[$.

<u>Exercice 4.</u> *Méthode de Newton.*On cherche à calculer les zéros de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$.

1. Montrer que chacun des zéros de f peut être approché par la méthode de Newton.
2. Écrire explicitement la relation de récurrence vérifiée par les suites des itérés.
3. L'algorithme est-il globalement défini ?