TD 2, Math III-1, analyse

Séries numériques

1. Calculer les sommes suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ (on appliquera Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1).

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (on appliquera Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ entre 0 et 1).

2. Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum\frac{n^2}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Séries à termes positifs :

3. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:

   (a) $u_n=\dfrac{n+1}{n^3-7}$, $u_n=\dfrac{n+1}{n^2-7}$, $u_n=\dfrac{n+1}{n-7}$, $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $u_n=\dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$, $u_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

   (b) $u_n=\dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$, $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$, $u_n=\dfrac{n}{2^n}$, $u_n=\dfrac{n^{100000}}{2^n}$.

   (c) $u_n=\dfrac{1}{n!}$, $u_n=\dfrac{n^{100000}}{n!}$, $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$, $u_n=\dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$.

   (d) $u_n=\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(n^2)}$.

4. (a) Trouver une primitive de $1/(x\ln^3(x))$.

   (b) Montrer que pour $a>1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3(x)}$ est convergente.

   (c) On pose $u_n=1/(n\ln^3(n))$ pour $n\geq 2$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

   (d) Donner un encadrement de R_n, le reste d'ordre n de $\sum u_n$.

Séries à termes quelconques :

5. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
$u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, $u_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$, $u_n = na^{n-1}$ $(a \in \mathbb{C})$,
$u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$, $u_n = \sin((n+1/n)\pi)$, $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

6. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
$u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$, $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

7. (a) En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.
   (b) En utilisant un développement limité montrer que la série de terme général $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ pour $n \geq 1$, diverge.

8. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
$u_n = n\ln(1+1/n) - \cos(1/\sqrt{n})$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

9. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.

10. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\, 2^{n-k}}$.

11. Les séries suivantes sont-elles convergentes?
   (a) $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}} \right)$,
   (b) $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{n-3/4}}{n^n} \right)$,
   (c) $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right) \right)$.

Series numériques - TD math III Analyse (correction)

1. a. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$: serie géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

D'autre part $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$: $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ donc $\forall N \in \mathbb{N}$ on peut lui appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre N

$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists c_n \in]0,1[$ t.q. $e^1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{1^n}{n!} e^0 + \frac{1^{N+1}}{(N+1)!} e^{c_N}$

Donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = e - \frac{e^{c_N}}{(N+1)!}$

or $c_N < 1$ donc $0 \leq \frac{e^{c_N}}{(N+1)!} < \frac{e}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

donc $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = e$. C'est à dire que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e}$

c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $x \to -\ln(1+x) \in C^\infty$ sur $[0,1]$. Notons f cette fonction

$\forall N \in \mathbb{N}, \exists c_N \in]0,1[$ t.q.

$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(c_N)$

Déterminons $f^{(n)}(x)$:

$f'(x) = \frac{-1}{1+x} = -(1+x)^{-1}$

$f''(x) = (1+x)^{-2}$

$f'''(x) = -2(1+x)^{-3}$

$f^{(4)}(x) = 6(1+x)^{-4} \ldots$

Hypothèse de récurrence: $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n}$

C'est vrai pour $n=1,2,3,4$. Supposons le vrai pour $k \in \mathbb{N}$.

Alors

$$f^{(k+1)}(x) = -(-1)^k (k-1)!\, k (1+x)^{-(k+1)}$$
$$= (-1)^{k+1} k! \,(1+x)^{-(k+1)}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! (1+x)^{-n}$

et $f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$ $f(1) = -\ln 2 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \frac{1}{(1+c_N)^{N+1}}$

or $c_N > 0$ donc

$\frac{1}{(1+c_N)} < 1$ et $0 \leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \frac{1}{(1+c_N)^{N+1}} \right| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ càd $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$

<u>Remarque:</u> On a pu calculer des sommes de séries mais c'est rare. En général tout ce que l'on peut faire, c'est savoir si elles convergent ou pas.

2. $\sum \frac{n^2}{n^2+1} \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$ donc la série diverge grossièrement

$\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{+\infty}{=} \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$

donc la série diverge grossièrement

Séries à termes positifs :

3. a. • $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$ $\qquad \frac{n+1}{n^3-7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$: en effet $\frac{\frac{n+1}{n^3-7}}{1/n^2} = \frac{n^3+n^2}{n^3-7} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Or $\Sigma \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et c'est une série de Riemann d'exposant 2 donc elle converge.

Donc $\Sigma \frac{n+1}{n^3-7}$ converge.

• $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$ $\qquad \frac{n+1}{n^2-7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ or $\Sigma \frac{1}{n}$ est à termes positifs et c'est une série de Riemann d'exposant 1 donc elle diverge. Donc $\Sigma \frac{n+1}{n^2-1}$ diverge.

• $u_n = \frac{n+1}{n-7} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\Sigma \frac{n+1}{n-7}$ diverge grossièrement

• $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\qquad \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\Sigma \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs elle est convergente donc $\Sigma \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

• $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$ on a $\frac{2^n+3^n}{n^2+5^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{5^n\left(\frac{n^2}{5^n}+1\right)} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\Sigma\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\left(\frac{3}{5}\right)$ donc convergente, et c'est une série à termes positifs donc $\Sigma \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$ converge.

(ça permet de réviser la notion de : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^n)$, donc on en déduit que $\frac{n^2}{5^n} = \frac{n^2}{e^{n \ln 5}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

• $u_n = \frac{1}{n^{1+1/\sqrt{n}}}$ $\qquad \frac{1}{n^{1+1/\sqrt{n}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et nous allons le montrer :

$$\frac{n}{n^{1+1/\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{1/\sqrt{n}}} = n^{-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \ln n\right)$$

or $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\frac{n}{n^{1+1/\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Or $\Sigma \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs qui diverge donc $\Sigma \frac{1}{n^{1+1/\sqrt{n}}}$ diverge.

6. $\bullet\ u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$ $\quad \dfrac{1}{\ln(n^2+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais "trop lentement"

autrement dit $\dfrac{n}{\ln(n^2+2)} = \dfrac{n}{\ln(n^2(1+\frac{2}{n^2}))} = \dfrac{n}{2\ln(n)+\ln(1+\frac{2}{n^2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Donc pour n "assez grand" $\dfrac{n}{\ln(n^2+2)} \geq 1$.

Donc $\dfrac{1}{\ln(n^2+2)} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs

qui diverge donc $\sum \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$ diverge.

$\bullet\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ $\quad$ or $\dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ "assez vite" :

Soit $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$, $\quad n^{\alpha}\dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc pour n assez grand, $\dfrac{n^{\alpha}\ln(n)}{n^{3/2}} \leq 1$ donc $0 \leq \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha}}$

Or $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$, donc

elle converge et $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ est à termes positifs donc elle converge aussi.

$\bullet\ u_n = \dfrac{n}{2^n}$ $\quad \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n}{\exp(n\ln(2))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ assez vite :

$n^2 \cdot \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n^3}{\exp(n\ln(2))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc pour n assez grand $n^2 \cdot \dfrac{n}{2^n} \leq 1$

donc $0 \leq \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et $\sum \dfrac{n}{2^n}$ est à termes positifs donc $\sum \dfrac{n}{2^n}$ converge

$\bullet\ u_n = \dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$: $\quad n^2 \cdot \dfrac{n^{100\,000}}{2^n} = \dfrac{n^{100\,002}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc pour n assez grand

$n^2 \cdot \dfrac{n^{100\,000}}{2^n} < 1$ donc $\dfrac{n^{100\,000}}{2^n} < \dfrac{1}{n^2}$ or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge

et $\sum \dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$ est à termes positifs, donc $\sum \dfrac{n^{100\,000}}{n^2}$ converge

c. • $u_n = \frac{1}{n!}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ donc $\sum \frac{1}{n!}$ converge

(ce qu'on sait puisqu'on a calculé sa somme)

• $u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{100\,000}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{100\,000}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100\,000} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$

donc $\sum \frac{n^{100\,000}}{n!}$ converge (on en déduit que $\frac{n^{100\,000}}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$n! \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ "plus vite que $n^{100\,000}$")

• $u_n = \frac{2^n}{n!}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ donc $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge

On en déduit que $n! \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ "plus vite" que 2^n

• $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+2}((n+2)!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$

$= \frac{4(n+2)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

C'est le "cas douteux" de la méthode d'Alembert, Mais ici, on voit que $4n^2+16n+4 > 4n^2+2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc

$\forall n \in \mathbb{N}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc $u_{n+1} > u_n$

ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Or $u_0 = 4$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc

$\sum \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ diverge grossièrement

d. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ Pour n "assez grand" (en fait $\forall n \geq 1$)

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ et $\sqrt[n]{u_n} = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$

donc $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ converge

• $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt[n]{u_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$\underset{+\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{-1}{n}+o(1/n)\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} \exp(-1+o(1)) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$$

donc $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge

• $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt[n]{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e > 1$

donc $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge

4. a. On a $\left(\frac{1}{\ln^2(x)}\right)' = -\frac{2}{x\ln^3(x)}$ donc $\frac{-1}{2\ln^2(x)}$ est une primite de $\frac{1}{x\ln^3(x)}$

b. $\forall X > a > 1$ $x \to \frac{1}{x\ln^3(x)}$ est continue sur $[a, X]$ et $\int_a^X \frac{dx}{x\ln^3(x)} = \left[-\frac{1}{2\ln^2(x)}\right]_a^X$

$= -\frac{1}{2\ln^2(X)} + \frac{1}{2\ln^2(a)} \underset{X\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\ln^2(a)}$

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ converge

c. $x \mapsto \frac{1}{x\ln^3(x)}$ est positive et decroissante sur $]a, +\infty[$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$

et $\sum u_n$ sont de meme nature. Or $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$ converge donc $\sum u_n$ aussi.

d. D'apres le cours $\forall n > 1$ $\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$

càd $\frac{1}{2\ln^2(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{2\ln^2(n)}$

Séries à termes quelconques

5. • $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$

Donc $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge absolume donc converge

• $u_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$ $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$ donc $\sum u_n$

converge absolument donc converge

• $u_n = n a^{n-1}$ $(a \in \mathbb{C})$ (a^{n-1} a un sens car la puissance est entiere)

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n+1}{n}|a| \underset{n\to\infty}{\to} |a|$ donc:

• si $|a| < 1$: $\sum u_n$ converge abs. donc converge

• si $|a| \geq 1$ $|u_n| = n|a|^{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement

• $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ $\sum u_n$ ne converge pas absolument car

$|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)}$ et $\sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ ne converge pas

(sinon $\sum \frac{1}{n}$ convergerait puisque $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$)

Mais $\sum u_n$ est une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(-1)^n u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \geq 0$

De plus, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0

donc d'après la règle des séries alternées $\sum u_n$ converge. Donc

$\sum u_n$ est SEMI-CONVERGENTE.

- $u_n = \sin((n+\frac{1}{n})\pi)$

Il ne faut pas croire qu'on reconnaît forcément une série alternée à la présence de $(-1)^n$. En effet :

$\sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) = \sin(n\pi)\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(n\pi)\sin(\frac{\pi}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n| = \sin(\frac{\pi}{n})$

Donc $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$. Or $\frac{\pi}{n}$ diverge donc Σu_n n'est pas absolument convergente

Mais elle est alternée (car sin est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$)

Or $|u_n| = \sin(\frac{\pi}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et pour n "assez grand" $(n \geq 2)$

$(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (car sin est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $(\frac{\pi}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ↓

Cela suffit pour appliquer la règle des séries alternées et Σu_n est semi-convergente.

- $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$

$$|u_n| = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \cancel{- 1}\right)$$

Donc $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Or $\Sigma \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann) donc Σu_n n'est pas abs. cvt

Mais c'est une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}$ $(-1)^n u_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} \geq 0$.

Étudions alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc

$|u_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ?

L'équivalent trouvé précédemment ne permet pas de le dire puisqu'il ne donne que le comportement en $+\infty$. Mais ici, une astuce permet de s'en sortir :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} = \frac{1+n-n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}$

Or $\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (évident).

N.B. : si on ne veut pas utiliser cette astuce basée sur l'expression conjuguée, on peut introduire la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

On a alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ (car $\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$) donc f est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^+$,

donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\downarrow$.

Finalement, d'après la règle des séries alternées $\sum u_n$ cv^{ce}. Elle est donc semi-convergente

6. . $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv^{ce} donc $\sum u_n$ est abs. cv^{e}.

. $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$ ça n'est pas facile de montrer que $\sum u_n$ n'est pas abs. cv^{t}. On ne le fait, on ne s'intéresse qu'à la convergence

On utilise la règle d'Abel. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n = \alpha_n x_n$

avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et $x_n = \cos(n)$

i). $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\downarrow$ et tend vers 0

ii) $\forall N\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} x_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n)\right|$

Même si u_0 n'est pas défini, il est pratique de définir $x_0 = \cos(0)$ et de faire partir la somme à $n=0$. Le terme dont on parle n'a de toute manière aucune importance

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\cos(n)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}\right| = \left|\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{i}}\right|$$

$$\leq \frac{|1| + |-e^{i(N+1)}|}{|1-e^{i}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i}|}$$

On a obtenu une majoration INDÉPENDANTE de N !! donc d'après la règle d'Abel $\sum u_n$ converge.

7 a. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos^2(n) = \left(\frac{e^{in}+e^{-in}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}\left(e^{2in} + 2e^0 + e^{-2in}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{2in}+e^{-2in}}{2}\right)$

$= \frac{\cos(2n)+1}{2}$

Donc $\sum \frac{\cos^2(n)}{n} = \sum \left(\frac{1}{2n} + \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$ or $\sum \frac{1}{2n}$ diverge

⚠ ! ça ne suffit pas pour conclure parce qu'il n'est pas vrai que "diverge + diverge" donne "dv"

Étude de $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$:

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n = \frac{1}{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \cos(2n)$

i) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ↓ vers 0

ii) $\forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=0}^{N} \cos(2n)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right| = \left|\frac{1-e^{2i(N+1)}}{1-e^{2i}}\right| \leq \underbrace{\frac{2}{|1-e^{2i}|}}_{\text{indép. de } N}$

Donc $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ converge ! Donc $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.

b. $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

(Rappel : $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$)

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est une série alternée et $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ↓ 0 donc $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ cv.

. $\sum \frac{1}{8n}$ diverge

. $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est abs. cv : en effet $3/2 > 1$, donc $\exists \alpha$ t.q. $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

t.q. $n^\alpha \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| = \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2-\alpha}}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour n "assez grand"

$0 \leq \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc $\sum \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right|$ cv

on pourra ajouter aux étudiants que : dès qu'on obtient $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p>1$ on est sûr que $\sum O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ cv absolument et que c'est inutile de le redémontrer. Mais c'est pour ça qu'il faut pousser le DL jusqu'à avoir une puissance $p>1$.

Finalement : $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ cv^{ce}, $\sum \frac{1}{8n}$ div^{ce} et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ cv^{ce}

donc $\sum \left(\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \sum u_n$ div.

Bien insister sur le fait qu'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ conv^{ce} et pourtant $\sum u_n$ diverge !!

Cet exercice illustre le fait que la règle des équivalents ne marche pas pour toutes les séries. D'après le cours, elle marche pour les séries à termes tous positifs (à partir d'un certain rang).

En multipliant par -1, on voit qu'elle marche pour les séries à termes tous négatifs (à partir d'un certain rang)

Ils se demandent alors pour quelles séries ça ne marche pas : c'est pour les séries qui changent de signe une infinité de fois.

8. $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\sum u_n$ converge absolument puisque $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p > 1$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$: en fait c'est une série alternée mais $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas décroissante.

On factorise le terme prépondérant : $u_n = \frac{(-1)^n}{n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)$

$\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui $\searrow$ vers 0 donc elle cv^{ce}

et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est abs. cv^{ce}. Donc $\sum u_n$ cv^{ce}.

On voit là un exemple de série alternée qui n'entre pas dans les hypothèses de la règle des séries alternées mais qui converge quand même.

9. $\forall n\in\mathbb{N}$ u_n est de la forme $u_n=\sum_{k=0}^{n} x_k\, y_{n-k}$ où $\forall k\in\mathbb{N}$ $x_k=y_k=\frac{1}{k!}$
On reconnaît donc que $\sum u_n$ est la série produit associée à $\sum x_n$ et $\sum y_n$
Or $\sum x_n=\sum y_n$ converge absolument (déjà montré). Donc $\sum u_n$ cv abs
et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)=e^2$

10. C'est le même exercice avec $x_k=\frac{1}{k!}$ et $y_k=\frac{(-1)^k}{2^k}$. On a encore $\sum x_n$ et $\sum y_n$ abs. cv donc $\sum u_n$ aussi et
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)=\frac{2e}{3}$$

11. a. $\sum\frac{1}{n^{3/4}}$ est une série de Riemann divergente

$\sum\frac{\sin(2n)}{n^{3/2}}$ s'étudie avec la règle d'Abel : on pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\alpha_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n=\sin(2n)$

i) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\searrow$ vers 0

ii) $\forall N\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N}\sin(2n)\right|=\left|\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right)\right|\le\left|\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right|\le\frac{2}{|1-e^{2i}|}$

Donc $\sum\left(\frac{1}{n^{3/4}}+\frac{\sin(2n)}{n^{3/4}}\right)$ diverge

b. $\frac{1}{n^{3/4}}+\frac{1-n^{n-3/4}}{n^n}=\frac{1}{n^{3/4}}+\frac{1}{n^n}-n^{n-3/4-n}=u_n$

alors $\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<1$ donc d'après la règle de Cauchy $\sum u_n$ cv

c. $u_n=\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}}-\exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)\underset{+\infty}{=}1+\frac{(-1)^n}{2n^{3/4}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)-\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$
$$\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or $\sum\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui $\searrow$ vers 0 donc elle cv.

et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est de la forme $\sum O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p>1$ donc abs. cv. Donc $\sum u_n$ cv.

– il est possible de leur proposer en devoir des exos "plus théoriques".   – □ –