Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Master SITN-S2
L. Pujo-Menjouet

pujo@math.univ-lyon1.fr
Systèmes Dynamiques
Equations Différentielles

Série n°2 : Méthodes de résolution explicite (suite et fin) - Applications - Equation d'Ordre Supérieur à 1

Exercice I. (Différentielles Totales Exactes - Facteurs Intégrants)

1. Résoudre les équations suivantes

$$a.\quad 2xydx + (x^2-1)dy = 0. \qquad b.\quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos(x)\sin(x)}{y(1-x^2)},\quad y(0)=2.$$

2. Trouver la valeur k pour que l'équation différentielle donnée ci-dessous soit exacte

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

3. Résoudre l'équation différentielle donnée ci-dessous en trouvant un facteur intégrant approprié

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0.$$

Exercice II.(Equations de Bernouilli)

1. Résoudre les équations de Bernouilli suivantes

$$a.\quad x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}. \qquad b.\quad \frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1).$$

2. Expliquer pourquoi il est toujours possible d'exprimer une équation différentielle homogène

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}) \text{ ou bien } \frac{dy}{dx} = G(\frac{x}{y})$$

(Indication: on pourra commencer par prouver que $M(x,y) = x^\alpha M(1, y/x)$ et que $N(x,y) = x^\alpha N(1, y/x)$)

Exercice III. (Equation de Ricatti)

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2,$$

est plus connue sous le nom d'équation de Ricatti.

1. Une équation de Ricatti peut être résolue par une succession de deux substitutions pourvu que nous connaissions une solution particulière y_1 de l'équation. Utiliser la substitution $y = y_1 + u$ pour simplifier le problème et essayer de le résoudre.

2. Application: trouver une famille de solutions pour l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2.$$

Exercice IV. (Quelques Exemples d'Applications en Physique et Biologie)

1. Croissance d'une bactérie:
Une culture possède P_0 bactéries. Au temps $t = 1$ heure, leur nombre est mesuré et il vaut $\frac{3}{2}P_0$. Si le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries $P(t)$ présentes au temps t, déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries triple.

2. Demi-vie du plutonium:
Un réacteur surrégénérateur convertit de l'Uranium 238 en un des ses isotopes, le Plutonium 239. Après 15 ans, nous trouvons que 0.043% du Plutonium initial a été désintégré. Trouver la demi-vie de cet isotope si le taux de désintégration est proportionnel au Plutonium restant.

3. Age d'un fossile:
Un os de fossile contient un dix-millième de carbone 14 originellement présent. Déterminer l'âge du fossile.

4. Chute d'une goutte de pluie:
Quand une goutte de pluie tombe, elle s'évapore en même temps en gardant sa forme sphérique. Si l'on suppose que le taux pour lequel la goutte s'évapore proportionnellement à sa surface, et la résistance à l'air est négligeable, alors la vitesse $v(t)$ de la goutte de pluie est donnée par

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0}v = g,$$

où, ρ est la densité de l'eau, r_0 est le rayon de la goutte de pluie au temps $t = 0$, $k < 0$ est une constante de proportionalité et la direction vers le bas est considérée ici comme la direction positive.

i. Résoudre l'équation ci-dessous, en supposant que la goutte tombe avec un état initial au repos.

ii. Montrer que le rayon de la goutte au temps t est $r(t) = (k/\rho)t + r_0$.

iii. Si $r_0 = 0.01$ mm et si $r = 0.007$ mm après 10 secondes de chute d'un nuage, déterminer le temps que la goutte mettra pour s'évaporer totalement.

5. Diffusion de médicament dans le sang:
Le taux de diffusion d'un médicament dans le sang est déterminé par l'équation,

$$\frac{dx}{dt} = r - kx,$$

où r et k sont des constantes positives. La fonction x décrit la concentration du médicament dans le sang en fonction du temps t.
i. Utiliser un portrait de phase pour déterminer la valeur limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$.
ii. Résoudre l'équation différentielle pour la condition initiale $x(0) = 0$. Dessiner le graphe de $x(t)$ et vérifier le résultat "intuitif" de la question i. A quel temps t la concentration sera-t-elle la moitié de sa valeur limite?
6. Croissance logistique:
Supposons qu'un étudiant porteur d'un virus de la grippe se rend sur le campus "isolé" de son université comprenant 1000 étudiants. Si nous supposons que le taux pour lequel le virus se répand dépend non seulement des étudiants infectés, mais également des non infectés, déterminer le nombre d'étudiants infectés après 6 jours, en tenant compte du fait qu'après 4 jours $x(4) = 50$.

Exercice V. (Equations d'ordre supérieur - Problèmes avec conditions initiales et conditions aux bords)

1. Soit la fonction y définie par $y = c_1 + c_2x^2$, où c_1 et c_2 sont des constantes. Montrer que y est solution de l'équation

$$xy'' - y' = 0,$$

sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Montrer ensuite que les constantes c_1 et c_2 ne peuvent être trouvées dans le cas où les conditions initiales sont $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème d'existence et d'unicité.
2.
a. Soit $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ la solution générale de l'équation différentielle

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Calculer la solution satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.
b. Même question pour les conditions aux bords $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.

Exercice VI. (Equation homogène -Equation non-homogène)

1. Déterminer si les solutions données sont linéairement indépendantes sur $]-\infty, +\infty[$.

a.	$f_1(x) = x,$	$f_2(x) = x^2,$	$f_3(x) = 4x - 3x^2.$
b.	$f_1(x) = 5,$	$f_2(x) = \cos^2(x),$	$f_3(x) = \sin^2(x).$
c.	$f_1(x) = \cos(2x),$	$f_2(x) = 1,$	$f_3(x) = \cos^2(x).$

2. Vérifier que les solutions données forment un ensemble fondamental de solutions des équations différentielles correspondantes sur l'intervalle indiqué. En déduire la solution générale.

$$\begin{array}{llll} a. & y'' - y' - 12y = 0; & y = e^{-3x},\ e^{4x}, & \text{sur }]-\infty, +\infty[. \\ b. & x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; & y = x,\ x^{-2},\ x^{-2}\ln x, & \text{sur }]0, +\infty[. \end{array}$$

3.

a. Vérifier que $y_{p1} = 3e^{2x}$ et $y_{p2} = x^2 + 3x$ sont respectivement des solutions particulières de

$$\begin{array}{ll} i. & y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}; \\ ii. & y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16. \end{array}$$

b. En déduire les solutions particulières des équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} iii. & y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}; \\ iv. & y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}. \end{array}$$

Exercice VII. (Réduction d'ordre)

a. Vérifier que $y_1 = e^x$ est une solution de $y'' - y = 0$ sur $]-\infty, +\infty[$. Utiliser la méthode de réduction d'ordre pour trouver une seconde solution y_2.
b. Vérifier que la fonction $y_1 = x^2$ est une solution de l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle sur $]-\infty, +\infty[$.

Exercice VIII. (Equations homogènes avec coefficients constants)

a. Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{ll} i. & 2y'' - 5y' - 3y = 0. \\ ii. & y'' - 10y' + 25y = 0. \\ iii. & y'' + 4y' + 7y = 0. \end{array}$$

b. Résoudre l'équation $y''' + 3y'' - 4y = 0$. C. Résoudre $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Exercice IX. (Superposition)

a. Résoudre l'équation $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$. b. Trouver une solution particulière pour l'équation $y'' - y' + y = 2\sin(3x)$. c. Résoudre l'équation $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$ d. Trouver une solution particulière pour l'équation $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$ e. Déterminer la forme d'une solution particulière de

$$\begin{array}{ll} i. & y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}. \\ ii. & y'' + 4y = x\cos(x). \\ iii. & y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\sin(2x) + 7xe^{6x}. \\ iv. & y'' - 2y' + y = e^x \\ v. & y'' + y = 4x + 10\sin(x) \text{ avec } y(\pi) = 0, \text{ et } y'(\pi) = 2. \\ vi. & y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}. \\ vii. & y''' + y'' = e^x\cos(x). \\ viii. & y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}. \end{array}$$