

TD 2, Math III-1, analyse

Suites dans $\mathbb{C}$, séries numériques (début)

Suites :

1. On considère les deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = -ay_n, \\ y_{n+1} = ax_n, \end{cases} \quad \text{avec } a > 0.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = ae^{i\pi/2}z_n$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = a^n|z_0|$.

(c) En déduire que si $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$ et que si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

Etudier la convergence de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ces deux cas.

(d) On suppose maintenant que $a = 1$. Montrer que $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge mais pas $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On considère la suite complexe définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{in\pi}{4}\right)$. Etudier la convergence de $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Séries :

3. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (on appliquera Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1).

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (on appliquera Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ entre 0 et 1).

4. Etudier la convergence des séries $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$ et $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Séries à termes positifs :

5. Etudier la convergence de la série de terme général u_n :

(a) $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$, $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$, $u_n = \frac{n+1}{n-7}$, $u_n = \sin(1/n^2)$, $u_n = \frac{1}{n^{1+1/\sqrt{n}}}$.

$$(b) \quad u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 2)}, u_n = \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}, u_n = \frac{n}{2^n}, u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n}.$$

$$(c) \quad u_n = \frac{1}{n!}, u_n = \frac{n^{100000}}{n!}, u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

$$(d) \quad u_n = \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n, u_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{(n^2)}, u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{(n^2)}.$$

6. (a) Trouver une primitive de $1/(x \ln^3(x))$.

(b) Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ est convergente.

(c) On pose $u_n = 1/(n \ln^3(n))$ pour $n \geq 2$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

(d) Donner un encadrement de R_n , le reste d'ordre n de $\sum u_n$.

Suites dans $\mathbb{C}$ - SÉRIES NUMÉRIQUE (DÉBUT)

SUITES (SUITE)

Ex 11

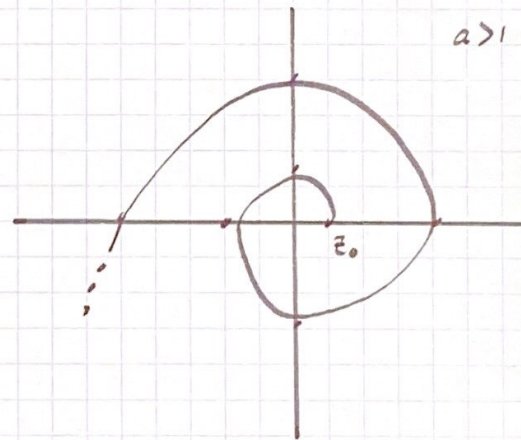
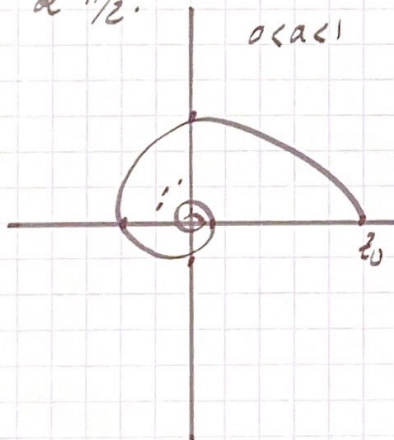
(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = x_n + iy_n = -ay_n + iax_n$
 or $ae^{i\pi/2} z_n = a z_n \left(\underset{0}{\cos \frac{\pi}{2}} + i \underset{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \right) = a i z_n = a i (x_n + iy_n) = -ay_n + iax_n = z_{n+1}$
 Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = ae^{i\pi/2} z_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|z_{n+1}| = |ae^{i\pi/2} z_n| = a|z_n| \dots$ et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_n| = a^n |z_0|$

(c) • si $0 < a < 1$ $a^n |z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• si $a > 1$ $a^n |z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

Remarque: multiplier par $ae^{i\pi/2}$ revient à faire une homothétie de a et une rotation de $\pi/2$.



(d) Si $a = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_n| = |z_0| = |1 + i \cdot 0| = 1$

Donc $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Par contre $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Supposons par

l'absurde que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge: si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite l si $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1} = e^{i\pi/2} z_n$ on aurait nécessairement:

$$l = e^{i\pi/2} l = i l, \text{ donc } l(1-i) = 0 \text{ donc } l = 0$$

$$\text{or si } z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \quad |z_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |l| \text{ donc car } |l| = 1, \text{ et donc } l \neq 0: \text{ contradiction}$$

Remarque: cet exo permet d'illustrer le fait que les nombres complexes sont des outils pratiques pour décrire la rotation

ex II $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| = 1 - \frac{1}{n} \text{ donc } |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \text{ Pourtant on va montrer que } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas.}$

Pour cela, comme dans l'exercice précédent exprimons u_{n+1} en fonction de u_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i n \pi/4} = \frac{n-1}{n} e^{i n \pi/4}$$

$$\text{donc } u_{n+1} = \frac{n}{n+1} e^{i(n+1)\pi/4} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} e^{i n \pi/4} e^{i \pi/4} = \frac{n^2}{n^2-1} u_n e^{i \pi/4}$$

Supposons que $u_n \rightarrow l$, alors puisque $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{n^2}{n^2-1} u_n e^{i \pi/4}$ on a $l = l e^{i \pi/4} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$, donc $l(1 - e^{i \pi/4}) = 0$ donc $l = 0$ ce qui est impossible car $|l| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1$

ex III SÉRIES

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \text{ et } \left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ donc } \left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(b) Soit $x \mapsto e^x$, $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, donc $\forall N \in \mathbb{N}$ on peut lui appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre N

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists c_N \in]0,1[\text{ t.q. } e^1 = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} e^0 + \frac{1^{N+1}}{(N+1)!} e^{c_N}$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = e - \frac{e^{c_N}}{(N+1)!} \text{ or } c_N < 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{e^{c_N}}{(N+1)!} < \frac{e}{(N+1)!} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

donc on a bien $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = e$ c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

© De même $x \mapsto -\ln(1+x)$ est C^∞ dans $[0,1]$. Notons f cette fonction
 $\forall N \in \mathbb{N} \exists C_N \in]0,1[\text{ t.q. } f(1) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(C_N)$

Déterminons $f^{(n)}(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x} = -(1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = (1+x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = -2(1+x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 6(1+x)^{-4} \dots \text{ hyp. de récurrence } f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! (1+x)^{-n}$$

C'est vrai pour $n=1,2,3,4$

Supposons-la vraie pour $k \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(k+1)}(x) = -(-1)^k (k-1)! k (1+x)^{-(k+1)} = (-1)^{k+1} (k)! (1+x)^{-(k+1)}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! (1+x)^{-n} \text{ et } f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!$$

$$\text{donc } \forall N \in \mathbb{N} \quad f(1) = -\ln(2) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \cdot \frac{1}{(1+C_N)^{N+1}}$$

$$\text{or } C_N > 0 \text{ donc } \frac{1}{1+C_N} < 1 \text{ et } 0 \leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \cdot \frac{1}{(1+C_N)^{N+1}} \right| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \text{ c'est-à-dire } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

On a pu calculer des sommes de séries, mais c'est rare. En général ce que l'on peut faire c'est savoir si elles convergent ou pas.

Ex IV. $\frac{n^2}{n^2+1} \not\rightarrow 0$ donc $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$ diverge grossièrement

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1 + o(1))$$

$$n \rightarrow \infty \quad e^{-1} \neq 0$$

Donc $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ diverge grossièrement

SÉRIES À TERMES POSITIFS

Ex II

a) $u_n = \frac{n+1}{n^3-7} \sim \frac{1}{n^2}$ (en effet $\frac{n+1/n^3}{1/n^2} = \frac{n^3+n^2}{n^3-7} \rightarrow 1$)

or $\sum \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2, donc elle converge. Donc $\sum \frac{n+1}{n^3-7}$ converge.

• $\frac{n+1}{n^2-7} \sim \frac{1}{n}$ or $\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et c'est une série de Riemann d'exposant 1, donc elle diverge, autrement dit $\sum \frac{n+1}{n^2-7}$ diverge

• $\frac{n+1}{n-7} \not\rightarrow 0$ donc $\sum \frac{n+1}{n-7}$ diverge grossièrement

• $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente donc $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

• $\frac{1}{n^{1+1/\ln n}} \sim \frac{1}{n}$. En effet $\frac{n}{n^{1+1/\ln n}} = \frac{1}{n^{1/\ln n}} = n^{-1/\ln n} = \exp\left(-\frac{1}{\ln n} \ln(n)\right)$

or $\frac{\ln n}{\ln n} \rightarrow 0$ donc $\frac{n}{n^{1+1/\ln n}} \rightarrow 1$. Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs qui **diverge**, donc $\sum \frac{1}{n^{1+1/\ln n}}$ diverge

⑥ • $\ln(n^2+2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ mais trop lentement...

$$\ln(n^2+2) = \ln(n^2(1+\frac{2}{n^2})) = 2\ln(n) + \ln(1+\frac{2}{n^2}) \rightarrow +\infty, \text{ Donc pour } n \text{ "assez grand"}$$

$\ln(n^2+2) \geq 1$, donc $\ln(n^2+2) \geq \frac{1}{n} > 0$, or $\sum \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs qui diverge donc $\sum \frac{1}{\ln(n^2+2)}$ diverge

• $\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ "assez vite". Soit $\alpha \in]\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[\$, $n^\alpha \cdot \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{\ln(n)}{n^{3/2-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

donc pour n assez grand, $n^\alpha \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} \leq 1$, d'où $0 \leq \frac{\ln(n)}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$, donc elle converge et $\sum \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ est à termes positifs donc elle converge aussi.

• $\frac{n}{e^n} = \frac{n}{\exp(n \ln 2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ "assez vite".

$\frac{n^2}{e^n} = \frac{n^2}{\exp(n \ln 2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc pour n assez grand

$\frac{n^2}{e^n} \leq 1$, donc $0 \leq \frac{n}{e^n} \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{n}{e^n}$ est à termes positifs

donc $\sum \frac{n}{e^n}$ converge.

• On peut faire comme le cas précédent ou bien $\frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n} = \frac{3^n((\frac{2}{3})^n + 1)}{5^n(\frac{n^2}{5^n} + \frac{\ln(n)}{5^n} + 1)}$

Or $\sum (\frac{3}{5})^n$ est une série géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et $|\frac{3}{5}| < 1$ donc elle converge. Et elle est à termes positifs donc $\sum \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n}$ converge aussi.

③ • $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$, donc $\sum \frac{1}{n!}$ converge ... ce que l'on savait
 puisqu'on a calculé sa somme cf ex. 3.6. Règle de d'Alembert (p.13)

• $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{100000}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{100000}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100000} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$, donc
 $\sum \frac{n^{100000}}{n!}$ converge. On en déduit que $\frac{n^{100000}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc $n! \rightarrow +\infty$ converge
 plus vite que $n^{100000}!!$

• $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+2} ((n+2)!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} = \frac{4(n+2)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
 C'est le cas "douteux" de la méthode de d'Alembert (p.13)

mais ici on voit que $4n^2+16n+4 > 4n^2+2n$ pour n assez grand, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc
 $u_{n+1} > u_n$ th, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

or $u_0 \neq 0$ donc $u_n \not\rightarrow 0$ donc $\sum \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ diverge grossièrement

④ • Pour n assez grand, en fait $n \geq 1$, $\sin(\frac{1}{n}) \geq 0$ et $\sqrt[n]{u_n} = \sin(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$
 donc $\sum \sin((\frac{1}{\sqrt{n}}))^n$ converge. (Règle de Cauchy)

• th en * $\sqrt[n]{u_n} = (1 - \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 - \frac{1}{n})) = \exp(n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})))$
 $= \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} < 1$

donc $\sum (1 - \frac{1}{n})^{(n^2)}$ converge

• th en * $\sqrt[n]{u_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e > 1$, donc $\sum (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ diverge !!
 (Règle de Cauchy)

ex [1]

(a) On a: $\left(\frac{1}{\ln^2(x)}\right)' = -\frac{2}{x \ln^3(x)}$, donc $-\frac{1}{2} \ln^2(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x \ln^3(x)}$

(b) $\forall x > a > 1$ $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3(x)}$ est continue sur $[a, x]$ et $\int_a^x \frac{dx}{x \ln^3(x)} = \left[-\frac{1}{2 \ln^2(x)}\right]_a^x$
 $= -\frac{1}{2 \ln^2(x)} + \frac{1}{2 \ln^2(a)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \ln^2(a)}$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ converge

(c) $x \mapsto \frac{1}{x \ln^3(x)}$ est positive et décroissante sur $]a, +\infty[$ ($a > 1$) (propriété page 14),
 donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ et $\sum u_n$ ont de même nature
 or $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ converge, donc $\sum u_n$ aussi

(d) D'après le cours $\forall n \geq 1$ $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ (propriété page 14)
 c'est-à-dire $\frac{1}{2 \ln^2(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{2 \ln^2(n)}$