Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L2- Printemps 2018

Série d'exercices n°3/5
Résolution numérique d'équations non linéaires

Exercice 1. *Valeur approchée de* $\sqrt{5}$ On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ en appliquant la méthode de Newton-Raphson à l'équation

$$x^2 - 5 = 0, \text{ pour } x > 0.$$

1. Formuler la suite $(x_n)_{nin\mathbb{N}}$ de Newton-Raphson.
2. En prenant $x_0 = 2$, comme valeur initiale, calculer x_1, x_2, x_3 sous forme fractionnaire.
3. Donner x_4 sous forme fractionnaire.
4. Comment faut-il procéder pour être sûr d'avoir une valeur exact pour 10 chiffres après la virgule en écriture décimale.

Exercice 2. *Points fixes attractifs et répulsifs*

1. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g : I \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $x^* \in I$ un point fixe de g. Pour $x_0 \in I$ donné on considère la suite définie par récurrence par la relation

   $$x_{p+1} = g(x_p), \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

   Dans toute cette partie, pour tout $h > 0$, nous noterons V_h l'intervalle fermé $[x^* - h, x^* + h]$.

   (a) On suppose que $|g'(x^*)| < 1$.
   Montrer qu'il existe $h > 0$ avec $V_h \subset I$ tel que pour tout $x_0 \in V_h$, on ait $x_p \in V_h$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et qu'en plus la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* quand p tend vers $+\infty$.
   On dit alors que x^* est un point attractif de g.

   (b) On suppose maintenant $|g'(x^*)| > 1$.
   Montrer qu'il existe $h > 0$ avec $V_h \subset I$ tel que pour tout $x_0 \in V_h - \{x^*\}$ on ait

   $$|g(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

   On s'éloigne du point fixe x^* si le point de départ n'est pas x^*. Dans ce cas on dit que le point fixe est répulsif.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3 - 4x + 1$. On se propose de résoudre numériquement l'équation

   $$f(x) = 0 \; (E).$$

(a) Montrer que l'équation (E) admet 3 racines réelles notées a_1, a_2 et a_3 avec

$$\frac{-5}{2} < a_1 < -2, \quad 0 < a_2 < \frac{1}{2} \text{ et } \quad \frac{3}{2} < a_3 < 2.$$

(b) On réécrit (E) sous la forme $x = \varphi(x)$ avec

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1).$$

Montrer que seul a_2 est un point fixe attractif de φ. Conclure.

(c) Montrer que pour $x > \frac{1}{4}$ l'équation (E) est équivalente à $x = \varphi_+(x)$, où

$$\varphi_+(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}.$$

Montrer alors que a_3 est un point fixe attractif de φ_+.

(d) Montrer que pour $x < 0$ l'équation (E) est équivalente à $x = \varphi_-(x)$, où

$$\varphi_+(x) = -\sqrt{4 - \frac{1}{x}}.$$

Montrer alors que a_1 est un point fixe attractif de φ_-.

<u>Exercice 3.</u> *Convergence globale partielle* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de f (c'est à dire $f(\alpha) = 0$) telles que les fonctions f, f' et f'' ne s'annulent pas sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ et ont toutes le même signe sur $]\alpha, +\infty[$ (elles sont soit toutes les trois strictement positives, soit strictement négatives).
On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ réelle définie par récurrence par la relation

$$x_0 > \alpha \text{ donné, et } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que l'élément x_p soit bien défini avec en plus $x_p > \alpha$.
   Montrer que x_{p+1} est bien défini et qu'il existe $c_p \in]\alpha, x_p[$ tel que
   $$x_{p+1} - \alpha = \frac{(x_p - \alpha)^2 f''(c_p)}{2f'(x_p)}.$$
   En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x_k > \alpha$.
2. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que
   $$\lim_{k\to+\infty} x_k = \alpha.$$
3. Supposons en plus que $f'(\alpha) \neq 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$. Quel est l'ordre de convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
4. Application : supposons que f soit un polynôme de degré n, ayant n racines réelles distinctes et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ la plus grande racine de f.
   Montrer que les hypothèses des ponts précédents sont satisfaites. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. *Méthode de Hörner* Le but est de trouver des racines d'un polynôme $P(x)$. Pour trouver une valeur approchée d'une des racines, nous devons évaluer $P(x)$ et $P'(x)$. Évaluer les valeurs de $P(x)$ pour un x donné peut quelques fois s'avérer assez long.
Hörner a proposé une méthode plus rapide pour pallier réduire les nombres de calculs.

1. On considère le polynôme de degré n suivant
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$
Nous posons $b_n = a_n$ et pour tout $k = 0, ..., n-1$, $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$.
   (a) Si nous posons $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ...b_2 x + b_1$, un polynôme de degré $n-1$, montrer que $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$.
   (b) Évaluer $P(x_0)$.
2. Exprimer la dérive de P en fonction de Q et Q'. Que peut-on en déduire sur le calcul des termes de la suite de la méthode de Newton-Raphson par cette méthode ?
3. Application : on considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$.
4. Montrer qu'il existe une unique racine de ce polynôme située entre -3 et $-3/2$. On choisit $x_0 = -2$ dans la suite de l'exercice.
   (a) Calculer $P(x_0)$ puis $P'(x_0)$ en utilisant la méthode de Hörner.
   (b) En déduire x_1 (premier terme de la suite définie par la méthode de Newton-Raphson).
   (c) Répéter cette méthode pour trouver x_2 et x_3.
   (d) En déduire une valeur approchée de la racine $x*$ de P située entre -3 et $-3/2$.

Exercice 5. *Méthode de Newton.*

1. On cherche à calculer les zéros de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$.
   (a) Montrer que chacun des zéros de f peut être approché par la méthode de Newton.
   (b) Écrire explicitement la relation de récurrence vérifiée par les suites des itérés.
   (c) L'algorithme est-il globalement défini ?
2. On s'intéresse au système en $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{cases} -5x_1 + 2\sin x_1 + 2\cos x_2 = 0, \\ -5x_2 + 2\sin x_2 + 2\cos x_1 = 0. \end{cases}$$
   (a) Récrire la recherche de solutions au système précédent comme la recherche de zéros d'une certaine fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que chacun des zéros éventuels de f peut être approché par la méthode de Newton.
   (c) Écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite des itérées et justifier que l'algorithme est globalement bien défini.

<u>Exercice 6.</u> *Examen Mai 2017 - Exercice 2 - 40 minutes - 9 points*
On considère l'équation

$$(\mathscr{E}) \quad x(1+e^x) = e^x, \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

1. (2 points) Montrer que cette équation admet une unique solution réelle l dans $[0, 1]$.
2. (3 points) On pose f_1 la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x(1+e^x) - e^x.$$

   (a) (3 points) Écrire la méthode de Newton-Raphson pour approcher la solution l en se servant de la fonction f_1 précédente. Est-ce que la suite construite par cette méthode est toujours définie ? Justifier la réponse.

   (b) **Bonus : (+2 points)** Justifier le fait que la suite construite à partir de cette méthode converge et donner l'ordre de convergence de l'erreur.

   (c) **Bonus : (+1 point)** Donner une interprétation graphique de cette méthode.

3. (4 points) On considère maintenant la fonction f_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

   On considère également la suite définie par :

$$x_0 \in [0, 1], \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ par } x_{n+1} = f_2(x_n).$$

   (a) (1.5 point) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f_2.

   (b) (1.5 point) Montrer que f_2 est strictement contractante dans cet intervalle.

   (c) (1 point) En déduire que la suite converge vers la solution de l'équation $(\mathscr{E})$ dans $[0, 1]$.