1er octobre 2025 - GROUPE 3

Bonne nouvelle ! Dans la suite du cours on n'étudiera que les edo **d'ordre 1** de la forme :

$x'(t) = f(t, x(t))$: NON AUTONOME sous forme normale

ou

$x'(t) = f(x(t))$: AUTONOME sous forme normale

Exemple : **MALTHUS :** $P'(t) = (b - d)\, P(t)$ — b : NAISSANCES, d : MORTS

edo : ordre 1, autonome, linéaire, sous forme normale

de la forme $x'(t) = f(x(t))$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (b-d)x$

Si on pose $b - d = a$ on a $\boxed{P'(t) = aP(t)}$ (E)

Comment résoudre (E) ?

il y a 1 ... il

étape 1 : on met (E) sous la forme $1.P'(t) - a\,P(t) = 0$

il y a 1 — il y a 0

étape 2 $\boxed{\text{ASTUCE}}$ on considère le coefficient devant $P(t)$ ici : $-a$

et on multiplie l'équation par : $e^{\int -a\,dt}$

Rappel :

① $\left(\int -a\,dt\right)' = -a$ (car $\left(\int f(t)\,dt\right)' = f(t)$)

② $\left(e^{u(t)}\right)' = u'(t)\,e^{u(t)}$

③ $(u.v)' = u'v + uv'$

si on multiplie par $e^{\int -a\,dt}$ on a :

$$e^{-\int a\,dt}\,P'(t) - a\,e^{-\int a\,dt}\,P(t) = 0$$

$f(t)$ — $\left(-\int a\,dt\right)' = -a$ — f' — f

$e^{f(t)}$ — $f'(t)\,e^{f(t)}$ "$\left(e^{f(t)}\right)'$"

$$u\,.\,P' + u'\,.\,P = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (uP)' = 0$

$\Leftrightarrow \quad u(t)P(t) = k$

ici $\quad e^{-\int a\,dt}\,P(t) = k$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{P(t)} = k\,e^{\int a\,dt} = \boxed{k\,e^{at}}$

Rappel : $e^{k}.x = c$, $x = \dfrac{c}{e^{k}} = c\,e^{-k}$

étape 3 : les solutions de (E) sont $\boxed{P(t) = k\,e^{at}}$

Comment trouver k ? par une condition initiale que l'on donne :

$P(0) = P_0$ (en $t=0$) (population initiale)

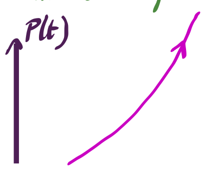
on a $P(t) = k e^{at}$ si $t=0$ $P(0) = k\,e^{a.0} = k$

donc $P(0) = P_0 = k$ — rappel : $a = b - d$

Conclusion : $\boxed{P(t) = P_0 . e^{at}}$

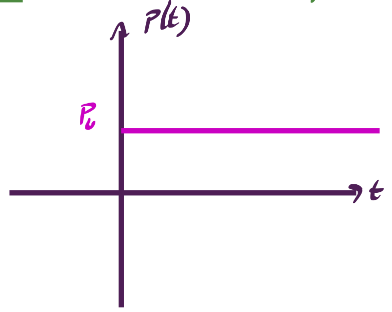
si $\boxed{b > d}$ plus de naissances que de morts alors $b - d > 0$ càd $a > 0$

$P(t) = P_0\,e^{at}$ $a > 0$

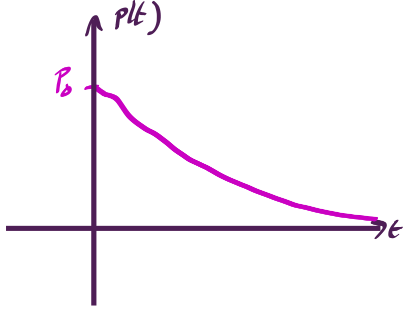


si $\boxed{b=d}$ autant de naissances que de morts $b-d=0$ ou encore $\boxed{a=0}$

$P(t) = P_0 \cdot e^{0 \cdot t} = P_0$



. si $\boxed{b<d}$: moins de naissances que de morts   alors $b-d<0$ c'est-à-dire $\boxed{a<0}$



Méthode générale : comment résoudre 1. $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (E)   edo ordre 1 non autonome linéaire $a(t)$

étape 1 : mettre sous la forme $\boxed{x'(t) + a(t)\,x(t) = 0}$ (E)

étape 2 : on multiplie (E) par $e^{\int a(t)dt}$ (conseil : d'abord calculer $\int a(t)dt$ puis $e^{\int a(t)dt}$)

on obtient $e^{\int a(t)dt}\, x'(t) + a(t)\, e^{\int a(t)dt}\, x(t) = 0$

étape 3 : on reconnaît la dérivée d'un produit :

$$\left(e^{\int a(t)dt} \cdot x(t)\right)' = 0$$

étape 4 : D'après l'étape 3) on en déduit que $e^{\int a(t)dt}\, x(t) = k$ (k = constante)

donc $\boxed{x(t) = k e^{-\int a(t)dt}}$

Exercice : Résoudre ① $x'(t) + t\,x(t) = 0$

Exercice : Résoudre

① $x'(t) + t x(t) = 0$

② $x'(t) + \sin(t) x(t) = 0$

③ $t x'(t) + x(t) = 0 \quad (t > 0)$

Solution : ① . étape 1 c'est déjà sous la bonne forme

. étape 2 on multiplie l'équation par $e^{\int t dt}$ or $\int t dt = \frac{t^2}{2}$

Donc on multiplie par $\boxed{e^{t^2/2}}$

étape 3 : on obtient $\left(e^{t^2/2} . x(t)\right)' = 0$

étape 4 Ainsi $e^{t^2/2} x(t) = k$ (k = constante)

Conclusion $\boxed{x(t) = k e^{-t^2/2}}$

② On passe directement à l'étape 2 :

On multiplie l'equation par $e^{\int \sin(t) dt}$.

Or $\int \sin(t) dt = -\cos(t)$

Donc on multiplie par $e^{-\cos(t)}$

étape 3 : On obtient $\left(e^{-\cos(t)} x(t)\right)' = 0$

etape 4 : Ainsi $e^{-\cos(t)} x(t) = k$ (k = constante)

Conclusion : $x(t) = k e^{\cos(t)}$

$\boxed{t x'(t) + x(t) = 0 \quad (E)}$

③ <u>étape 1</u> On divise (E) par t (on a le droit car $t>0$ donc $\neq 0$)

on obtient $x'(t) + \frac{1}{t} x(t) = 0$

<u>étape 2</u> · on multiplie par $e^{\int \frac{1}{t} dt}$ or $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| \overset{t>0}{=} \ln(t)$

c'est à dire on multiplie par $e^{\ln(t)} = t$

on obtient $t x'(t) + \frac{t}{t} x(t) = 0$

càd $\boxed{t x'(t) + x(t) = 0}$

<u>étape 3</u> on a ainsi $(t x(t))' = 0$

<u>étape 4</u> d'où $t x(t) = k$ càd $\boxed{x(t) = \frac{k}{t}}$

<u>Remarque</u> : TRÈS UTILE !!!

Si on a une edo de la forme $\boxed{a(t) x'(t) + a'(t) x(t) = 0}$

dérivée

Si on a une edo de la forme $\boxed{a(t)x'(t)+a'(t)x(t)=0}$

on passe directement à l'étape 3 : $(a(t)x(t))'=0$

$\Rightarrow a(t)x(t)=k$

$\Rightarrow \boxed{x(t)=\frac{k}{a(t)}}$ (avec $a(t)\neq 0$ pour $t\in I$)

• **Résoudre** $x'(t)+a(t)x(t)=g(t)$

étape 1 on met sous la forme $1.x'(t)+a(t)x(t)=g(t)$

étape 2 on multiplie par $e^{\int a(t)dt}$ on obtient

$$e^{\int a(t)dt}x'(t)+a(t)e^{\int a(t)dt}x(t)=g(t)e^{\int a(t)dt}$$

étape 3 on reconnaît : $\left(e^{\int a(t)dt}x(t)\right)'=g(t)e^{\int a(t)dt}$ nouveau

étape 4 (nouveauté) on intègre chacun des membres : ne pas oublier

$$e^{\int a(t)dt}x(t)=\int g(t)e^{\int a(t)dt}dt+k \quad , k\in\mathbb{R}$$

conclusion :

$$\boxed{x(t)=e^{-\int a(t)dt}\left(\int g(t)e^{\int a(t)dt}dt+k\right)}$$

Exercice : Résoudre

① $x'(t)+tx(t)=3$

② $tx'(t)+x(t)=t$

③ $\sin(t)x'(t)+\cos(t)x(t)=\sin(t)$

(4) $x'(t)+tx(t)=3t$

① étape 1 : c'est déjà sous la bonne forme

étape 2 : on multiplie par $e^{\int t dt}$ càd $e^{t^2/2}$

étape 3 on obtient $\left(e^{t^2/2}.x(t)\right)'=3e^{t^2/2}$

étape 4 on intègre des 2 cotés et on obtient :

$$e^{t^2/2}x(t)=\int 3e^{t^2/2}dt+k$$

$$e^{t^2/2}x(t) = \int 3e^{t^2/2}dt + k$$

ou encore. $x(t) = e^{-t^2/2}\left(3\int e^{t^2/2}dt + k\right)$

dérivée

② $t x'(t) + 1x(t) = t$

On passe directement à l'étape ③ car la dérivée de t est 1.

On a : $(t x(t))' = t$

On intègre chacun des membres.

$$t x(t) = \int t\,dt + k$$

$$\Leftrightarrow t x(t) = \frac{t^2}{2} + k$$

$\boxed{\text{si } t>0}$ $\Leftrightarrow x(t) = \boxed{\frac{t}{2} + \frac{k}{t}} = \frac{t^2+2k}{2t}$

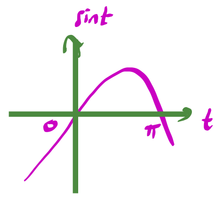
dérivée

③ $\sin(t)x'(t) + \cos(t)x(t) = \sin(t)$

On passe directement à l'étape ③ car $(\sin(t))' = \cos(t)$

On a donc $(\sin(t)x(t))' = \sin(t)$

$$\Leftrightarrow \sin(t)x(t) = \int \sin(t)dt + k$$



soit $t \in]0,\pi[$ on a $x(t) = \frac{1}{\sin(t)}\cdot(-\cos(t)) + \frac{k}{\sin t}$

$$= \frac{-\cos(t)}{\sin(t)} + \frac{k}{\sin(t)}$$

$$= -\cotan(t) + \frac{k}{\sin(t)}$$

④ $x'(t) + t x(t) = 3t$

étape 2 : On multiplie l'équation par $e^{\int t\,dt} = e^{t^2/2}$

On obtient

étape 3 $\left(e^{t^2/2}x(t)\right)' = 3te^{t^2/2}$

étape 4 : On intègre des 2 côtés et on a étape 4 : On intègre des 2 côtés et on a :

$$e^{t^2/2}x(t) = 3\int t e^{t^2/2}\,dt + k \qquad \text{or } \int t e^{t^2/2}dt = \int u' e^{u} dt = e^{u} = e^{t^2/2}$$

$$\Leftrightarrow e^{t^2/2} x(t) = 3\left(e^{t^2/2}\right) + k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = 3 + k e^{-t^2/2}}$$

<u>Exercice</u> : <u>Dynamique de populations</u>

<u>Rappel</u> : <u>MALTHUS</u> $P'(t) = aP(t)$ où $a = b - d$ (naissances - morts)

<u>On suppose</u> $a > 0$

Essayons les solution sans connaître la solution exacte.

Pour ça, on cherche les équilibres :

On pose $P'(t) = f(P(t))$ où $f : P \mapsto a.P$

pour simplifier $\Big\downarrow$ $P' = f(P)$

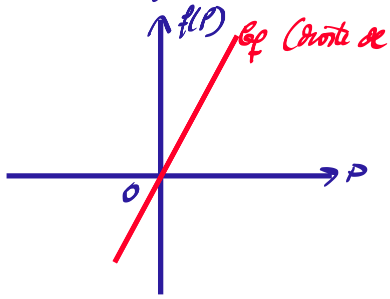
Les équilibres P^* vérifient : $P^{*\prime} = 0$ càd $f(P^*) = 0$

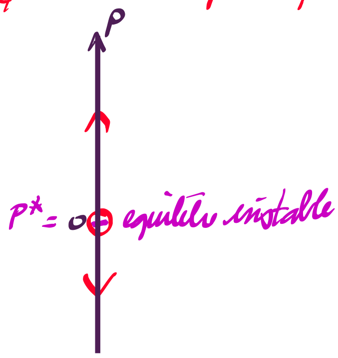
$\iff \underset{\substack{>0 \\ \text{(hyp.)}}}{a}\, P^* = 0 \iff \boxed{P^* = 0}$

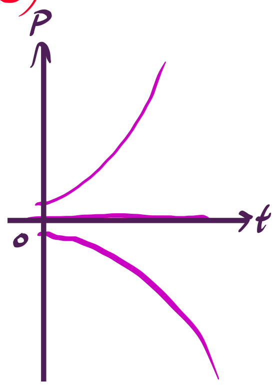
il y a un seul équilibre : $\boxed{P^* = 0}$

étudions le signe de f (ici $f(P) = aP$)

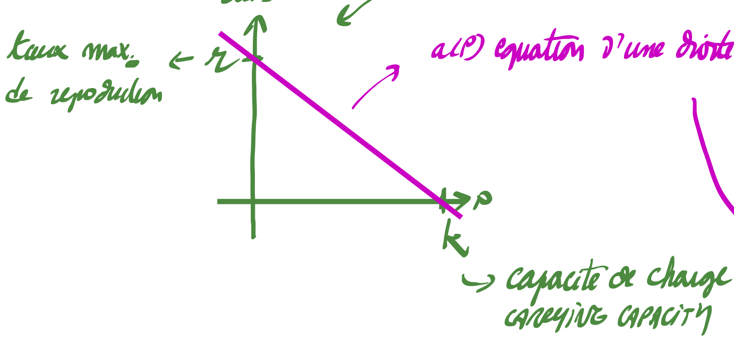
C_f (Droite de coef directeur $a > 0$ passant par $(0,0)$)







VERHULST : $P' = a(P)\,P$



$a(P)$ équation d'une droite : $y = ax + b$, $b = r$

$y = ax + r$ $\qquad a = \dfrac{r - 0}{0 - k} = -\dfrac{r}{k}$

$y = -\dfrac{r}{k}x + r$

ici $y = a(P)$ et $x = P$

donc $a(P) = -\dfrac{r}{k}P + r = r\left(1 - \dfrac{P}{k}\right)$

L'équation $\boxed{P'} = a(P).P = \boxed{r\left(1 - \dfrac{P}{k}\right).P}$ équation de VERHULST ou équation LOGISTIQUE

Étude des équilibres $\quad {}' = f(P)$ avec $f : P \mapsto r\left(1 - \dfrac{P}{k}\right)$

Etude des équilibres

On pose $P' = f(P)$ avec $f : P \mapsto r\left(1-\frac{P}{k}\right)P$

$(r>0,\ k>0)$

Les équilibres vérifient $P^{*\prime}=0$

c'est-à-dire $r\left(1-\frac{P^*}{k}\right)P^*=0 \iff P^*=0$ ou $1-\frac{P^*}{k}=0$

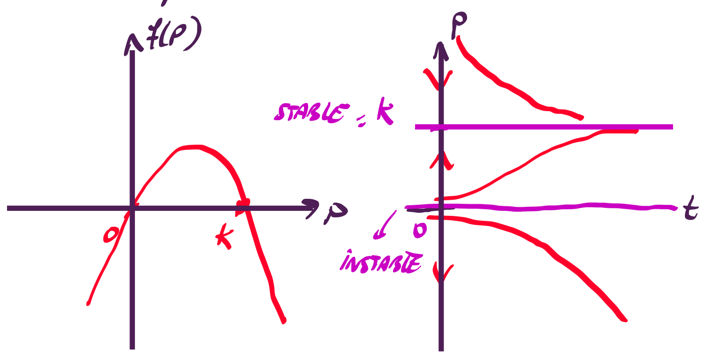
$r > 0$

$\iff \boxed{P^*=0}$ ou $\boxed{P^*=k}$

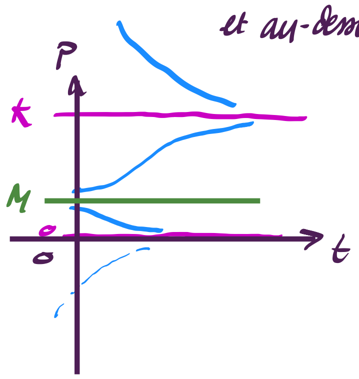
On a 2 équilibres $P^*=0$ et $P^*=k$

$f(P) = r\left(1-\frac{P}{k}\right)P$ (polynôme de degré 2 en P)

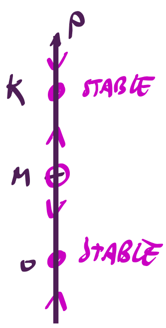
$= rP - \frac{rP^2}{k}$

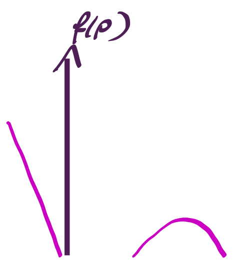


Problème : pour être plus réaliste il faudrait une barre de seuil t.q. au-dessus la population prospère et au-dessous la population s'éteint.



$0 \leq M \leq k$, $k>0$

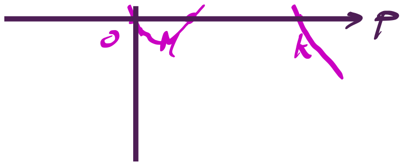




$$\boxed{f(P) = rP.(P-M)\left(1-\frac{P}{k}\right)}$$

ou $= rP.(M-P)(1-P/k)$?

equation avec effet ALLEE



équation avec effet ALLEE

$$\boxed{P' = rP(P-M)\left(1-\frac{P}{k}\right)}$$