T.D.Série 3 (Correction) :

Opérateurs différentiels classiques. Théorème des accroissements finis et applications

Exercice 1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable.

1. **Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ est une fonction continûment différentiable.**
   Preuve.
   On remarque d'abord que la fonction f est la fonction composée $f = \varphi \circ r$, où
   $$\begin{array}{l} r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto r(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}; \\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \in V = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y \mapsto \varphi(y). \end{array}$$
   La fonction $f : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable en chaque point $\mathbf{x} \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ puisque ses dérivées partielles $\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f$ sont continues sur U (selon le théorème 2 du cours, voir la p. 13). Pour démontrer que $\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f$ sont continues sur U il faut les calculer : la fonction $g(x) = \sqrt{x^2 + const}, const \geq 0$, d'une seule variable x est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour la composée de deux fonctions dérivables d'une variable on a
   $$\partial_x f(\mathbf{x}) = \partial_x \varphi(r) = \varphi'(r)\partial_x r = \varphi'(r) 2x \tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{\varphi'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \tfrac{\varphi'(r)x}{r}.$$
   De la même facon on obtient $\partial_y f = \frac{\varphi'(r)y}{r}, \partial_z f = \frac{\varphi'(r)z}{r}$. Les fonctions $\varphi'(r)x$, $\varphi'(r)y$, $\varphi'(r)z$, r sont continues sur $\mathbb{R}^3$ ($\varphi'(r)$ est continue comme composée $\varphi' \circ r$ de deux fonctions continues), $r(x,y,z) \neq 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Ça entraîne que les quotients $\frac{\varphi'(r)x}{r}$, $\frac{\varphi'(r)y}{r}$, $\frac{\varphi'(r)z}{r}$ sont continus sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
2. **Montrer que pour tout** $(x,y,z) \neq (0,0,0)$
   $$div(gradf) = \partial_x\left(\partial_x f\right) + \partial_y\left(\partial_y f\right) + \partial_z\left(\partial_z f\right) = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r), \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$
   Preuve. On a deja calculé les dérivées partielles :
   $$\partial_x f = \frac{\varphi'(r)x}{r}, \quad \partial_y f = \frac{\varphi'(r)y}{r}, \quad \partial_z f = \frac{\varphi'(r)z}{r}.$$
   On va continuer le calcul :
   $$\partial_x\left(\partial_x f\right) = \partial_x\left(\tfrac{\varphi'(r)x}{r}\right) = \tfrac{\partial_x(\varphi'(r)x)r - \varphi'(r)x\partial_x(r)}{r^2} = \tfrac{\varphi''(r)\partial_x(r)xr + \varphi'(r)\partial_x(x)r - \varphi'(r)x\frac{x}{r}}{r^2} =$$
   $$= \tfrac{\varphi''(r)x^2}{r^2} + \tfrac{\varphi'(r)}{r} - \tfrac{\varphi'(r)x^2}{r^3}, \ \partial_y\left(\partial_y f\right) = \tfrac{\varphi''(r)y^2}{r^2} + \tfrac{\varphi'(r)}{r} - \tfrac{\varphi'(r)y^2}{r^3},$$
   $$\partial_z\left(\partial_z f\right) = \tfrac{\varphi''(r)z^2}{r^2} + \tfrac{\varphi'(r)}{r} - \tfrac{\varphi'(r)z^2}{r^3}.$$
   Donc
   $$div(gradf) = \partial_x\left(\partial_x f\right) + \partial_y\left(\partial_y f\right) + \partial_z\left(\partial_z f\right) = \tfrac{\varphi''(r)(x^2+y^2+z^2)}{r^2} + 3\tfrac{\varphi'(r)}{r} - \tfrac{\varphi'(r)(x^2+y^2+z^2)}{r^3} =$$
   $$= \tfrac{\varphi''(r)r^2}{r^2} + 3\tfrac{\varphi'(r)}{r} - \tfrac{\varphi'(r)r^2}{r^3} = \varphi''(r) + \tfrac{2}{r}\varphi'(r).$$
3. **Calculer $div\left(grad\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right)$.**
   Preuve. On peut utiliser la précédente en considerant $\varphi(r) = \frac{1}{r}$. On a
   $$div\left(grad\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\right) = 0.$$

Exercice 2 On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire habituel $(\cdot,\cdot)$ associé à la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que $\forall a \in U$ il existe un vecteur unique noté par $\nabla_a f \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\nabla_a f, h) = df_a(h), \forall h \in \mathbb{R}^n$. De plus, si $(x_1,\ldots,x_n)$ sont les coordonnées canoniques (orthogonales), alors

$$\nabla_a f = (gradf)(a) = (\partial_{x_1} f(a), \ldots, \partial_{x_n} f(a)).$$

Preuve. Il a été démontré dans le cours (voir la page 13) que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ on a

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i df_a(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_{x_i} f(a).$$

D'autre part la dernière somme est égale au produit scalaire (écrit par rapport aux coordonnées orthogonales (habituelles)) :

$$\sum_{i=1}^n h_i \partial_{x_i} f(a) = ((\partial_{x_1}(a), \ldots, \partial_{x_n}(a)), h) = (\nabla_a f, h).$$

Le vecteur $\nabla_a f$ est unique : s'il existe un second vecteur $\bar{\nabla_a} f$ tel que $df_a(h) = (\nabla_a f, h) = (\bar{\nabla_a} f, h)$ on a $(\nabla_a f - \bar{\nabla_a} f, h) = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$. Selon les propriétés du produit scalaire euclidien on a $\nabla_a f - \bar{\nabla_a} f = 0$.

Exercice 3 Soient E et F des espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction continue sur U, différentiable en tout point de $U \setminus \{a\}$ et telle que $\lim_{x\to a} df_x$ existe. Montrer que f est différentiable en a.
Preuve. Notons $L = \lim_{x\to a} df_x, L \in \mathcal{L}(E,F)$. Nous allons montrer que f est différentiable en a et que $d_a f = L$. Etudions pour cela

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E}.$$

Pour $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $B^o(a,\varepsilon) \subset U$ et

$$\|x-a\| \le \delta, x \ne a \Rightarrow \|df_x - L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon \tag{0.1}$$

(d'après l'hypothèse de la différentiabilité de f sur $U \setminus \{a\}$). Soit alors $h \in E$ t.q.

$$0 \le \|h\|_E \le \delta.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ on a $\|(a+th) - a\|_E = t\|h\|_E \le \delta$. Donc $a+th \in B^o(a,\delta) \subset U$. On peut donc définir une application $g : [0,1] \to F$ par

$$g(t) = f(a+th) - f(a) - L(th), \forall t \in [0,1].$$

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall t \in]0,1[$ on a (les applications df_{a+th} et L sont linéaires)

$$g'(t)\cdot s = dg_t(s) = df_{a+th}(sh) - L(sh) = s\left(df_{a+th}(h) - L(h)\right).$$

C.-à.-d.

$$\|g'(t)\| = \|df_{(a+th)}(h) - L(h)\| \le \|df_{(a+th)} - L\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|h\|_E \le \varepsilon\|h\|_E$$

d'après (0.1) puisque $\|(a+th) - a\| \le \delta\ \forall t \in]0,1[$.
Apliquons alors le Théorème des accroissements finis à g sur $[0,1]$: $\|g(1) - g(0)\| \le \varepsilon \cdot \|h\|$.

On a

$$g(1) - g(0) = f(a+h) - f(a) - L(h) - f(a) + f(a) + L(0) = f(a+h) - f(a) - L(h) - 0 + 0.$$

On a alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $0 < \|h\|_E \leq \delta$ alors

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Donc f est différentiable en a est $df_a = L$.

Exercice 4 Soient $E = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées x, y et $f : E \to \mathbb{R}$ et une fonction définie par

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}},\ x^2+y^2 > 0; \quad f(0,0) = 0.$$

1. **Montrer que f est continue sur $E = \mathbb{R}^2$.**
   Preuve. Il a été démontré dans le cours d'analyse, que pour un polynôme arbitraire $P(t)$ on a
   $$\lim_{t\to+\infty} \frac{P(t)}{e^t} = 0. \tag{0.2}$$
   Notre fonction f est la composée $\exp \circ g$, où $g(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il reste un seul point $(0,0)$ où il faut vérifier la continuité de f. Mais grâce à (0.2) nous avons
   $$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} = \lim_{u\to+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$
   La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.
2. **Est-elle différentiable dans $E = \mathbb{R}^2$?**
   Preuve. Notre fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme la composée de deux foctions dérivables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Il reste un seul point $(0,0)$ où il faut vérifier la différentiabilité de f. On peut calculer les dérivées partielles $\partial_x f, \partial_y f$ aux points $(x,y) \neq 0$:
   $$\partial_x f = \partial_x \left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}},\ \partial_y f = \partial_y \left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$
   Grâce à (0.2) on a
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^2} e^{-\frac{1}{u}} = 0 \cdot \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$
   De la même façon on obtient $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f = 0$. Donc la limite de la matrice jacobienne Df (voir la page 13 du cours) (de la matrice de l'application linéaire $df_{(x,y)}$) il existe bien :
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} Df((x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\partial_x f, \partial_y f) = (0,0).$$
   Nous pouvons appliquer le résultat de l'exo précédent : dans notre cas il existe
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} df_{(x,y)}$$
   f est donc dérivable à'l origine $(0,0)$ et finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 5
Soient E et F des espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application différentiable dans U. On suppose que df est continue au point x_0. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < \|h\| \leq \eta$ et $0 < \|k\| \leq \eta$ entraînent

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - df_{x_0}(h - k)\| \leq \varepsilon \|h - k\|.$$

On pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(x_0+x) - df_{x_0}(x)$ définie sur un voisinage ouvert V de 0.
Preuve. Soit $r > 0$ tel que $x_0 + B^0(0, r) \subset U$. On considère la fonction $g(x) = f(x_0+x) - df_{x_0}(x)$ définie sur $B^o(0, r)$. g est différentiable sur $B^0(0, r)$ car f est différentiable et df_{x_0} est linéaire. De plus

$$dg_x = df_{(x_0+x)} - df_{x_0}.$$

df est continue en x_0, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|x\|_E \leq \delta$ on a

$$\|df_{(x_0+x)} - df_{x_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon.$$

C.-à.-d.

$$\|dg_x\| = \|df_{(x_0+x)} - df_{x_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Appliquons le Théorème des accroissements finis à g sur $B^o(0, \delta)$: $\forall h, k \in B^o(0, \delta)$ qui est connexe

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - df_{x_0}(h - k)\| = \|g(h) - g(k)\|_F \leq \varepsilon \|h - k\|_E.$$

Exercice 6 **Soient $\mathbb{R}^2$ avec les coordonées x, y, $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connèxe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$ sont bornées dans U. Montrer que f est uniformément continue sur U.**
Preuve. Lorsque les dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$ sont bornées dans U il existe $K > 0$ tel que

$$|\partial_x f(a)| \leq K, |\partial_y f(a)| \leq K, \ \forall a \in U.$$

On a donc

$$\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \sup_{h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2, \|h\|=1} \|df_a(h)\|_{\mathbb{R}} = \sup_{h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2, \|h\|=1} \|\partial_x f(a)h_1 + \partial_y f(a)h_2\|_{\mathbb{R}}.$$

Mais

$$\|\partial_x f(a)h_1 + \partial_y f(a)h_2\|_{\mathbb{R}} = |\partial_x f(a)h_1 + \partial_y f(a)h_2| \leq K(|h_1| + |h_2|).$$

Pour la simplicité on va considérer la norme $\|h\| = |h_1| + |h_2|$ sur $\mathbb{R}^2$. (On peut obtenir le cas général en utilisant le théorème d'equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$). Des lors on a montré que

$$\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \leq K.$$

Maintenant nous pouvons appliquer le Théorème 7 (voir la page 16) du cours. Alors on a

$$\|f(a) - f(b)\|_{\mathbb{R}} = |f(a) - f(b)| \leq K\|a - b\|_{\mathbb{R}^2}$$

quel que soit $a, b \in U$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ (le cas $K = 0$ est évident) tel que si $\|a - b\| \leq \delta$ on a $\|f(a) - f(b)\|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$. Autrement dit la fonction f est uniformément continue sur U.