TD 3, Math III-1, analyse

Séries numériques (fin)

1. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
   $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$, $u_n = na^{n-1}$ $(a \in \mathbb{C})$,
   $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, $u_n = \sin((n+1/n)\pi)$, $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

2. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
   $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

3. (a) En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.
   (b) En utilisant un développement limité montrer que la série de terme général
   $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ pour $n \geq 1$, diverge.

4. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:
   $u_n = n\ln(1+1/n) - \cos(1/\sqrt{n})$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.

6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\ 2^{n-k}}$.

7. Les séries suivantes sont-elles convergentes?
   (a) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}} \right)$,
   (b) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{n-3/4}}{n^n} \right)$,
   (c) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right) \right)$.

Maths III - Analyse TD 3

SÉRIES NUMÉRIQUES - FIN

Ex [I] a. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, on a : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

donc $\sum |u_n|$ cv, donc $\sum u_n$ cv absolument et donc cv

b. $u_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$ $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

donc $\sum u_n$ cv abs. donc cv.

c. $u_n = n a^{n-1}$ $(a \in \mathbb{C})$ (a^{n-1} a un sens car la puissance est entière)

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)}{n} \frac{|a|^n}{|a|^{n-1}} = \frac{n+1}{n} |a| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$

donc • si $|a| < 1$ $\sum u_n$ cv abs donc cv

• si $|a| \geq 1$ $|u_n| = n|a|^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement

d. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ $\sum u_n$ ne converge pas abs. car $|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)}$

et $\sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ ne converge pas

(en effet, $\frac{n}{\ln(n+1)} = \frac{n}{\ln(n(1+\frac{1}{n}))} = \frac{n}{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, donc pour n assez grand

$\frac{n}{\ln(n+1)} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ série à termes > 0 qui diverge)

Mais $\sum u_n$ est une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(-1)^n u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \geq 0$

De plus, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ↓ et tend vers 0

donc d'après la règle des séries alternées, $\sum u_n$ cv. Donc $\sum u_n$ est semi-cv.

e. $u_n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{n})$

N.B. : Il ne faut pas croire qu'on reconnait forcément une série alternée à la présence de $(-1)^n$!!

$\sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) = \sin(n\pi)\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(n\pi)\sin\frac{\pi}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n| = \sin(\frac{\pi}{n})$ donc $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$

or $\sum \frac{\pi}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ n'est pas abs. cv.

Mais elle est alternée (car sin est positive sur $[0,\pi]$)

or $|u_n| = \sin(\frac{\pi}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et pour "n assez grand" $(n \geq 2)$

$|u_n|$ est ↘ (car sin est ↗ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $(\frac{\pi}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est ↘)

ça suffit pour appliquer la règle des séries alternées, et $\sum u_n$ est semi-cv.

f. $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$

$|u_n| = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right] \underset{+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1\right)$ $\left((1+x)^a = 1 + ax + a(a-1) + \dots\right)$

donc $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Donc $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann).

Donc $\sum u_n$ n'est pas abs. cv. Mais c'est une série alternée, car $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(-1)^n u_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} \geq 0$

Étudions $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$: on a vu que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $|u_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ?

L'équivalent trouvé précédemment ne permet pas de le dire puisqu'il ne donne le comportement qu'en ∞.

Ici, cependant, une astuce permet de s'en sortir :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| = \sqrt{1+n} - \sqrt{n} = \frac{1+n-n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}$

or $\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment ↘. Si on ne veut pas utiliser cette astuce basée sur l'expression conjuguée, on peut introduire la fonction :

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \end{array}$

On a alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ (car $\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$)

donc f est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}_+$, donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\downarrow$.

Finalement, d'après la règle des séries alternées, $\sum u_n$ cv (elle est donc semi-cv)

Ex $\boxed{II}$ ⓐ $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv donc $\sum u_n$ est abs cv

ⓑ $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$. Ça n'est pas facile de montrer que $\sum u_n$ n'est pas abs. cv. On ne le fait pas, on ne s'intéresse qu'à la cv.

On utilise la règle d'Abel. On pose:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \alpha_n x_n$ avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et $x_n = \cos(n)$

i. on a $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\downarrow$ et tend vers 0

ii. $\forall N \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{n=0}^{N} x_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n)\right|$ ($\bar{m}$ si u_0 n'est pas défini, il est pratique de définir $x_0 = \cos(0)$ et de faire partir la somme à $n=0$)

Le terme dont on part ici n'a de toute façon pas d'importance.

$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} e^{in}\right| = \left|\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{i}}\right| \leq \frac{|1|+|-e^{i(N+1)}|}{|1-e^{i}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i}|}$

On a obtenu une majoration INDÉPENDANTE de N, donc d'après la règle d'Abel, $\sum u_n$ cv.

Ex III ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) = \left(\frac{e^{in}+e^{-in}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}\left(e^{2in} + 2e^{0} + e^{-2in}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{2in}+e^{-2in}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2n)\right)$$

Donc $\sum \frac{\cos^2(n)}{n} = \sum \left(\frac{1}{2n} + \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Or $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. ⚠!! Ça ne suffit pas pour conclure, parce qu'il n'est pas vrai que "div" + "div" $\rightarrow$ "div" !!

D'où l'étude de $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_n = \frac{1}{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \cos(2n)$

(i). $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \searrow$ vers 0

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(2n)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right| = \left|\frac{1-e^{2i(N+1)}}{1-e^{2i}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{2i}|}$ (indépendant de N)

Donc $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ cv or "div + conv $\Rightarrow$ div", d'où $\sum \frac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.

(6) $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{+\infty}{=} \cancel{1} + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \cancel{1}$

(Rappel : $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$)

or
- $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est une série alternée et $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \searrow$ vers 0 donc $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ cv
- $\sum \frac{1}{8n}$ div
- $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est abs. cv, en effet $3/2 > 1$, donc $\exists \alpha$ t.q. $1 < \alpha < 3/2$

alors $n^\alpha \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| = \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2-\alpha}}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc pour n assez grand

$0 \leq \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv, donc $\sum \left|O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right|$ cv.

Remarque : On peut dire que dès que l'on obtient $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p>1$, on est sûr que $\sum O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ cv abs, et ce sera dorénavant inutile de le redémontrer.

Mais c'est pour cela que l'on doit "pousser" les D.L. jusqu'à avoir une puissance $p > 1$

Finalement $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ cv, $\sum \frac{1}{8n}$ div et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ cv, donc

$$\sum \left(\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \sum u_n \text{ div.}$$

Bien insister sur le fait que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ cv et pourtant $\sum u_n$ div !!!

N.B. : Cet exo illustre le fait que la règle des ~ ne marche pas pour toutes les séries.

D'après le cours, elle marche pour toutes les séries à TERMES POSITIFS !!

(à partir d'un certain rang).

C'est pour les séries qui changent de signe une infinité de fois que ça ne marche pas !!!

Ex [4] ⓐ $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= 1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)-1+\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc Σu_n converge abs. puisque $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p>1$.

ⓑ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$: en fait c'est une série alternée mais $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas décroissante

On factorise le terme prépondérant

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n\left(1+(-1)^n/\sqrt{n}\right)} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

or $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui ↘ vers 0, donc elle cv^{ge} et $\Sigma\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est abs. cv^{te}. Donc Σu_n cv^{ge}.

On voit là un exemple de série alternée qui n'entre pas dans les hyp. de la règle des séries alternées mais qui cv^{ge} quand même.

Ex [5] $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n est de la forme : $u_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\, y_{n-k}$ où $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k = y_k = \frac{1}{k!}$

On reconnaît alors que Σu_n est la série produit associée à Σx_n et Σy_n

Or $\Sigma x_n = \Sigma y_n$ cv^{ge} abs (déjà montré (exo 3b et 5c de la série II)

Donc Σu_n cv^{ge} abs. Et $\Sigma u_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) = e^2$

Ex $\boxed{6}$ C'est le même exo avec $x_k = \frac{1}{k!}$ et $y_k = \frac{(-1)^k}{2^k}$. On a encore $\sum x_n$ et $\sum y_n$ abs. cv, donc $\sum u_n$ aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n}_{\text{exo 36 serie 2}}\Big)\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} y_n}_{\text{exo 39 serie 2}}\Big) = \frac{2e}{3}$

Ex $\boxed{7}$ $\boxed{a}$ • $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$ est une série de Riemann donc div

• $\sum \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}}$ s'étudie avec la règle d'Abel

On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_n = \frac{1}{n^{3/4}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = \sin(2n)$

(i) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \downarrow$ vers 0

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \sin(2n)\right| = \left| \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} e^{2in}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{2i}|}$

Donc $\sum\left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}}\right)$ ~~converge~~ div

$\boxed{b}$ $\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{(1-n^{n-3/4})}{n^n} = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1}{n^n} - n^{n-3/4-n} = u_n$

Alors $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Donc d'après la règle de Cauchy $\sum u_n$ cv.

$\boxed{c}$ $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left((-1)^{n+1}/2n^{3/4}\right)$

$\underset{+\infty}{=} 1 + \frac{(-1)^n}{2n^{3/4}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

or $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui $\downarrow$ vers 0

donc elle converge, et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est de la forme $\sum O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p>1$ donc elle est abs. convergente.

Donc $\sum u_n$ converge.