

### Feuille 3 : Bases de logique

**Exercice 3-1** Soient  $P, Q$  deux propositions. Ecrire la table de vérité de  $\text{non}(P \Rightarrow Q)$  et celle de  $P$  ou  $(\text{non } Q)$ .

**Exercice 3-2** Soient  $P, Q, R$  des propositions. Ecrire la table de vérité de  $(P \Rightarrow Q)$  ou  $((\text{non } R)$  et  $P)$ .

**Exercice 3-3** Soient  $P, Q, R$  des prédicats. Montrer :

- $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$  équivaut à  $(P$  et  $Q) \Rightarrow R$ .
- $(P$  ou  $Q) \Rightarrow R$  équivaut à  $(P \Rightarrow R)$  et  $(Q \Rightarrow R)$ .

**Exercice 3-4** Soient  $P, Q$  des propositions. Montrer que  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P$  et  $Q))$  est une tautologie.

**Exercice 3-5** Montrer par disjonction de cas que dans un bar, il existe toujours une personne  $P$  telle que :  $P$  boit  $\Rightarrow$  tout le monde boit.

**Exercice 3-6** Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des étudiants de l'université de Lyon 1,  $\mathcal{S}$  l'ensemble des jours de la semaine et, pour un étudiant  $x$ ,  $h_j(x)$  son heure de réveil le jour  $j$ .

- Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
- Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques, puis l'énoncer en français.

**Exercice 3-7** Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux parties de  $E$ . Écrire en utilisant les symboles  $\forall, \exists, \in, \notin$  les assertions

- $A \cap B \neq \emptyset$  ;
- $A \subset B$  ;
- $A \not\subset B$  ;
- $A = \emptyset$ .

**Exercice 3-8** On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0, 1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\} \text{ et } F = \left\{ x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Déterminer  $E$  et  $F$ .

**Exercice 3-9** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est *bornée* si la propriété suivante est vraie :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$$

Écrire avec des quantificateurs la définition de «  $f$  n'est pas bornée. »

- Écrire avec des quantificateurs la définition de «  $f$  est croissante », puis celle de «  $f$  n'est pas croissante », et enfin celle de «  $f$  est décroissante ».

**Exercice 3-10** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres entiers naturels définie par  $u_0 = 1, u_1 = 3$  et  $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$ . Établir la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3^n.$$

**Exercice 3-11** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = u_1 = -1$  et  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $u_n = 3^n - 2^{n+1}$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 3-12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer par récurrence forte que l'on a  $u_n = 2^{n-1}$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

**Exercice 3-13** Pour tout nombre entier naturel  $n$ , soit  $P(n)$  la propriété :  $2^n > n^2$ .

1. Démontrer que, pour  $n \geq 3$ , l'implication  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  est vraie.
2. Pour quels entiers  $n$  la propriété  $P(n)$  est-elle vraie ?

**Exercice 3-14** Un nombre entier  $p \geq 2$  est dit *premier* si ses seuls diviseurs sont 1 et  $p$ . En raisonnant par récurrence, démontrer que tout nombre entier  $n \geq 2$  est un produit de nombres premiers.

**Exercice 3-15 (Principe des tiroirs)**

1. Soit  $n$  un nombre entier,  $n \geq 1$ . Démontrer que, si vous rangez  $n+1$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs distincts, au moins un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.
2. Un fichier contient 500 000 mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?

**Exercice 3-16** Deux pays sont dits voisins s'ils ont une frontière commune. On suppose qu'il y a un nombre fini de pays et que chaque pays a au moins un voisin. En considérant l'application qui à chaque pays associe son nombre de voisins, démontrer qu'il existe au moins deux pays qui ont le même nombre de voisins.

**Exercice 3-17** Soit  $n \geq 1$  un nombre entier naturel. On se donne  $n+1$  nombres réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans  $[0, 1]$  tels que  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ . On veut démontrer par l'absurde la propriété (P) suivante : *il existe deux de ces nombres qui sont distants de moins de  $\frac{1}{n}$* .

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et de l'expression  $x_i - x_{i-1}$  une formule logique équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (P) (*pour cela, on pourra chercher à prouver  $x_n - x_0 > 1$* ).
4. Donner une nouvelle preuve de la propriété (P) en utilisant cette fois le principe des tiroirs.

**Exercice 3-18** Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre réel  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

1. Vérifier que l'on a  $p^2 = 2q^2$ .
2. Justifier que l'on peut supposer que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.
3. Démontrer que  $p$  est pair.
4. En déduire que  $q$  est pair.
5. En déduire que  $p$  et  $q$  n'existent pas.

**Exercice 3-19** Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ?
2. Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ?

**Exercice 3-20** Soit  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  les parties du plan  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x, y), x + y \leq 1\} & P_2 &= \{(x, y), x - y \leq 1\} \\ P_3 &= \{(x, y), -x + y \leq 1\} & P_4 &= \{(x, y), -x - y \leq 1\}. \end{aligned}$$

1. Représenter  $P_1 \cap P_2$ ,  $P_3 \cap P_4$  et  $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ .
2. Comparer  $(P_1 \cap P_2)^c$ ,  $P_1^c \cap P_2^c$ ,  $(P_1 \cup P_2)^c$  et  $P_1^c \cup P_2^c$ .

**Exercice 3-21** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  deux ensembles. Écrire le produit cartésien  $A \times B$ . Quel est le nombre de parties de  $A \times B$ ?

**Exercice 3-22** On considère les ensembles  $E = \{1, 5\}$ ,  $F = \{2, 3\}$  et  $G = \{1, 4\}$ . Donner en extension les ensembles suivants :

1.  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(E \cap G)$ ,  $\mathcal{P}(F \cap G)$ ,  $\mathcal{P}(E \cup G)$
2.  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ ,  $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$
3.  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

**Exercice 3-23** Soit  $E$  un ensemble fini non vide et  $a_0$  un élément fixé de  $E$ . On considère l'application

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} .$$

1. Démontrer que, si  $\text{Card}(A)$  est pair, alors  $\text{Card}(f(A))$  est impair, et que si  $\text{Card}(A)$  est impair, alors  $\text{Card}(f(A))$  est pair.
2. Démontrer que, pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $(f \circ f)(A) = A$ .
3. En déduire que  $f$  est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

#### **Exercice 3-24**

Soit  $E$  un ensemble. On suppose qu'il existe une application  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  qui soit surjective.

1. Pour  $a \in E$ , à quel ensemble appartient  $f(a)$ ?
2. On considère l'ensemble  $A := \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$  et  $a$  un antécédent de  $A$  par  $f$ . Est-il possible que  $a \in A$ ? Que  $a \notin A$ ? Qu'en concluez-vous?

**Exercice 3-25** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

1. Si  $A \subset E$  et  $B \subset F$ , démontrer que l'on a alors  $A \times B \subset E \times F$ .
2. Supposons que les ensembles  $E$  et  $F$  contiennent chacun au moins deux éléments distincts. Trouver une partie  $X$  de  $E \times F$  qui ne soit pas de la forme  $A \times B$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$ .

#### **Exercice 3-26 (Formule de Vandermonde)**

1. Soit  $k, m, n$  trois nombres entiers naturels tels que  $k \leq \min\{m, n\}$ . Démontrer l'identité

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Pour cela, on pourra considérer deux ensembles finis  $E, F$  tels que  $\text{Card}(E) = m$  et  $\text{Card}(F) = n$ , puis dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à  $k$  éléments dans la réunion  $E \cup F$ .

2. En déduire l'identité  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ .

**Exercice 3-101** Le symbole  $\neg$  désigne la négation. Le connecteur NAND (non-et) est défini par

$$P \text{ NAND } Q \text{ équivaut à } \neg(P \wedge Q).$$

1. Donner la table de vérité du connecteur NAND.
2. Peut-on définir  $\neg$ ,  $\wedge$  et  $\vee$  en fonction uniquement de NAND?
3. Mêmes questions pour le connecteur NOR (non-ou) défini par  $\neg(P \vee Q)$ .

**Exercice 3-102** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et  $A$  une partie de  $E$  à  $p$  éléments.

1. Combien y a-t-il de parties  $X$  de  $E$  contenant  $A$  ?
2. Soit  $m$  un entier tel que  $p \leq m \leq n$ . Combien y a-t-il de parties  $X$  de  $E$  à  $m$  éléments contenant  $A$  ?
3. Combien y a-t-il de couples  $(X, Y)$  de parties de  $E$  tels que  $X \cap Y = A$  ?

**Exercice 3-103** On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par le procédé suivant :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n = \begin{cases} \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\ \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

**Exercice 3-104** Soit  $p \geq 1$  et  $n \geq 0$  deux nombres entiers. On désigne par  $D(p, n)$  le nombre de  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$  tels que  $x_1 + \dots + x_p = n$ .

1. Établir l'identité  $D(p, n) = \sum_{k=0}^n D(p-1, n-k)$ .
2. En déduire la formule  $D(p, n) = \binom{n+p-1}{p-1}$ .

**Exercice 3-105** Soit un ensemble  $E$ . Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , on désigne par  $A \Delta B$  l'ensemble  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

1. Démontrer que  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
2. Démontrer qu'il existe une unique partie  $X$  de  $E$  telle que pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A \Delta X = X \Delta A = A$ .
3. Démontrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , il existe une partie  $A'$  de  $E$  et une seule telle que  $A \Delta A' = A' \Delta A = E$ .

**Exercice 3-106 (Fonctions caractéristiques)** Étant donné une partie  $X$  d'un ensemble  $E$ , on définit une application  $f_X : E \rightarrow \{0, 1\}$  par :

$$\forall e \in E, f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , démontrer l'équivalence

$$A = B \iff f_A = f_B.$$

2. Comment peut-on exprimer la condition  $A \subset B$  avec les fonctions  $f_A$  et  $f_B$  ?
3. Exprimer  $f_{A \cap B}$ ,  $f_{A \cup B}$  et  $f_{A^c}$  à l'aide de  $f_A$  et  $f_B$ .
4. Exprimer  $f_{A \Delta B}$  en fonction de  $f_A$  et  $f_B$ .
5. Reprendre les questions 2, 3 de l'exercice précédent en utilisant les fonctions caractéristiques.

**Exercice 3-107** Soit  $A, B$  deux ensembles finis non vides.

1. En raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de  $A$ , démontrer que le nombre d'applications de  $A$  dans  $B$  est  $\text{Card}(B)^{\text{Card}(A)}$ .
2. Retrouver de cette manière le cardinal de  $\mathcal{P}(A)$  (utiliser l'exercice 3-106).