

Examen 2023

Exercice 1 Partie 1 $x'(t) = f(x(t))$ où $f: x \mapsto (x+1)(x-1)x^2$

a. ordre : 1 car la dérivée la plus haute est x'

autonome : oui $x' = f(x)$

linéaire : non car $f(x(t)) = (x+1)(x-1)x^2$

b. Les équilibres x^* vérifient $x^{*'} = 0$ c-à-d $f(x^*) = 0$

$$\text{ou } f(x^*) = 0 \Leftrightarrow (x^*+1)(x^*-1)x^{*2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^*+1=0 \text{ ou } x^*-1=0 \text{ ou } x^{*2}=0$$

$$\Leftrightarrow x^* = -1 \text{ ou } x^* = 1 \text{ ou } x^* = 0$$

On a donc 3 équilibres $-1, 0$ et 1

c. Etude de la stabilité des équilibres:

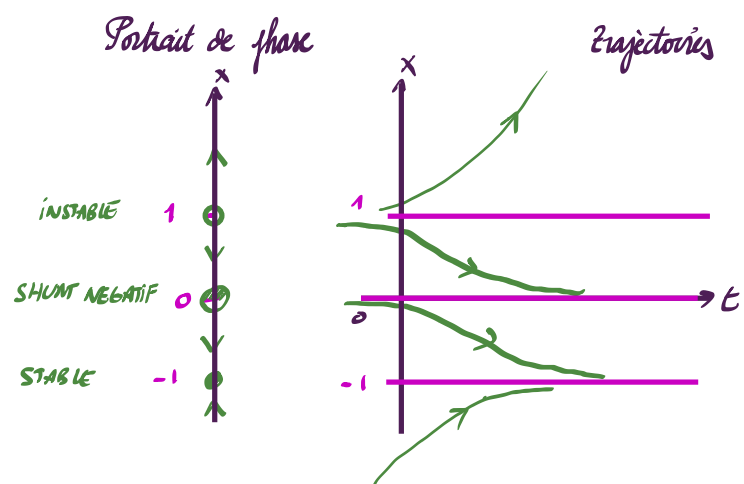
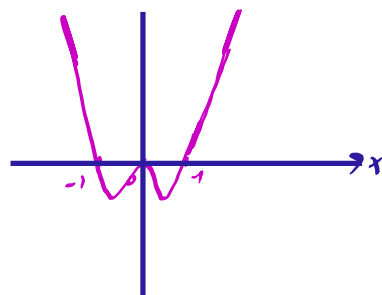
Méthode 1:

$\infty \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

Méthode 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-1)x^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \downarrow x \cdot x \cdot x^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
signe de $x+1$	-	0	+	+	+
signe de $x-1$	-	-	-	0	+
signe de x^2	+	+	0	+	+
signe de $f(x)$	+	0	-	0	+



Partie 2: $2t^3 x'(t) + 6t^2 x(t) = t^2$ avec $x(1)=1$

a. ordre: 1 deuxiè la plus haute

autonome non à cause de $2t^3$ ou $6t^2$ ou t^2

linéaire oui car elle est de la forme $a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$
où $a_1(t) = 2t^3$, $a_0(t) = 6t^2$ et $g(t) = t^2$

b. On remarque la dérivée de $t \mapsto 2t^3$ est la fonction $t \mapsto 6t^2$

Donc cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(2t^3 x(t))' = t^2$$

On intègre de chaque côté et on trouve:

On intègre de chaque côté et on trouve:

$$2t^3 x(t) = \frac{t^3}{3} + K$$

On divise par $2t^3$ en supposant que $t \in]0, +\infty[$ car la condition initiale est $x(1)=1$ ^{$t=1$}

Pour $t > 0$ on obtient $x(t) = \frac{t^3}{3 \cdot 2t^3} + \frac{K}{2t^3} = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{K}{2t^3}}$

Déterminons K comme $x(1)=1$ on a: $1 = \frac{1}{6} + \frac{K}{2 \cdot 1^3} = \frac{1}{6} + \frac{K}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ donc } K = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Conclusion: la solution du problème est $x(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{2 \cdot t^3 \cdot 3} = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{5}{6t^3}}$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5}{t^3} \right)$$

$$= \boxed{\frac{t^3 + 5}{6t^3}}$$

Exercice 2

- La réponse est la A) car les équilibres de ce problème sont 0, 1 et 3 et le graphe de f "traverse" chacun de ces équilibres (aucun exposant précis)

- Portrait de phase:

