TD 4

Suites de fonctions

1. On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Ces suites convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
   (b) Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?
   (c) Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2)$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que $\forall a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
   (c) Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.
   (a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
   (b) Etudier la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
   (c) On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

6. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan(x/n)$. Etudier la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

TD 4 - SUITES DE FONCTIONS

Ex $\boxed{1}$ a. Convergence simple :

- de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$: soit $x_0\in[0,1]$ fixé

$f_n(x_0) = \frac{x_0}{x_0+n} + \arctan(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \arctan(x_0)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \arctan(x)$

- de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$ soit $x_0\in[0,1]$ fixé

$g_n(x_0) = \frac{nx_0}{1+nx_0}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x_0\in\,]0,1] \quad \frac{nx_0}{1+nx_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \text{si } x_0 = 0 \quad \frac{nx_0}{1+nx_0} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \text{donc } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ cv simplement sur } [0,1]$$

vers $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x\in\,]0,1] \end{cases}$

b. Convergence uniforme :

- de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$

$x\in[0,1]$ $\quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{x+n} + \arctan(x) - \arctan(x)\right|$

$$= \left|\frac{x}{x+n}\right| \underset{x\leq 1}{\leq} \frac{1}{x+n} \underset{x\geq 0}{\leq} \frac{1}{n} \rightarrow \text{indep de } x$$

donc $0 \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

Remarque : On peut aussi calculer ce sup en dérivant $\frac{x}{x+n}$ mais c'est plus long.

C'est bon d'essayer quelques majorations évidentes avant de se lancer dans un calcul de sup.

• de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est C^0 sur $[0,1]$, or g n'est pas C^0 sur $[0,1]$

donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas u^t sur $[0,1]$ vers g.

Or g est la limite simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$. C'est donc le <u>seul</u> candidat pour être la limite uniforme. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas u^t sur $[0,1]$

Autre preuve:

Si on trouve une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,1]$ t.q.

$|g_n(x_n)-g(x_n)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ alors d'après le cours ça prouve que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas u^t vers g sur $[0,1]$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x_n=\frac{1}{n}$. On a bien $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x_n\in[0,1]$

et $|g_n(x_n)-g(x_n)| = \left|\frac{n/n}{1+n/n}-1\right| = \left|\frac{1}{2}-1\right| = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

• convergence u^t de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,1]$:

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t vers f sur $[0,1]$, c'est encore vrai sur $]0,1]$ $(]0,1]\subset[0,1]$

• convergence u^t de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,1]$

L'argument de la discontinuité ne marche plus car g est C^0 sur $]0,1]$

Par contre, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $x_n=\frac{1}{n}$ convient encore car $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\in]0,1]$

donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas u^t sur $]0,1]$.

• Soit $a]0,1]$

* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t vers f sur $[a,1]$ car $[a,1]\subset[0,1]$.

* $\forall x\in[a,1]$ $|g_n(x)-g(x)| = \left|\frac{nx}{1+nx}-1\right| = \left|\frac{nx-1-nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$ indep. de x

donc $\frac{1}{1+na}$ est un majorant de $\{|g_n(x)-g(x)|, x\in[a,1]\}$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t vers g sur $[a,1]$.

Remarque : On voit donc que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t sur $[a,1]$, $\forall a$ t.q. $a\in]0,1[$ et pourtant $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne cv pas u^t sur $]0,1]$!!

c. Étude de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1,+\infty[$

. convergence simple : soit $x_0\in[1,+\infty[$ fixé

$$f_n(x_0)=\frac{x_0}{x_0+n}+\arctan(x_0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\arctan(x_0)$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv simplement sur $[1,+\infty[$ vers $f : x\mapsto\arctan(x)$

N.B. : En toute rigueur, il faudrait changer de nom de fonction parce que cette fonction f n'a pas le m̂ ensemble de définit$^°$ qu'à la question a. C'était déjà vrai pour la question b. Mais pour ne pas alourdir on peut garder f par abus.

. convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1,+\infty[$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $x_n=n$. Nous avons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\in[1,+\infty[$ et $|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{x_n}{x_n+n}=\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[1,+\infty[$

Remarque : On peut vérifier qu'aucune majoration ne marche puis calculer le sup. Puis remarquer que c'est + rapide d'utiliser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• Étude de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1,+\infty[$

• convergence simple. Soit $x_0\in[1,+\infty[$ fixé $g_n(x_0)=\frac{nx_0}{1+nx_0}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv simplement sur $[1,+\infty[$ vers $g\equiv1$

cv u^t. Pour tout $x\in[1,+\infty[$ $|g_n(x)-g(x)|=\frac{1}{1+nx}\le\frac{1}{1+n}$ indep. de x

Donc $0\le\sup_{x\in[1,+\infty[}|g_n(x)-g(x)|\le\frac{1}{1+n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t vers g sur $[1,+\infty[$.

Remarque : On voit bien qu'il est nécessaire de toujours indiquer sur quel ensemble a lieu la convergence.

sur $[0,1]$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^e u^t et pas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

sur $[1,+\infty[$: c'est le contraire !!!

Ex II ⓐ Soit $x_0 \in [-1,1]$ fixé

$\forall n\in\mathbb{N}, \quad f_n(x_0) = \sin(n x_0^2)\exp(-n x_0^2)$

si $x_0 \neq 0 \quad |f_n(x_0)| \leq \exp(-n x_0^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

si $x_0 = 0 \quad f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv^e simplement sur $[-1,1]$ vers $f \equiv 0$

ⓑ On pose $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

L'idée est de faire un lien entre x et n de façon à ce que x_n "élimine l'effet de n"

On a, $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x_n \in [0,1]$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |\sin(\frac{n}{n})\exp(-\frac{n}{n})| = \sin(1)e^{-1} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv^e pas u^t sur $[0,1]$.

ⓒ $\forall x\in[a,1] \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin(nx^2)}{e^{nx^2}}\right| \leq \frac{1}{e^{nx^2}} \leq \frac{1}{e^{na^2}}$ indép de x

donc $0 \leq \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{e^{na^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv^e u^t sur $[a,1]$ vers f.

Ex. III . Avant la cv^{ce} u^{t}, il faut faire la cv^{ce} simple.

- soit $x_0 \in [0,1]$ fixé
- Si $x_0 = 0$ $f_n(x_0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- si $x_0 \in [0,1[$ $f_n(x_0) = \dfrac{x_0^n e^{-x_0}}{1+x_0^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- si $x_0 = 1$ $f_n(x_0) = \dfrac{e^{-1}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2e}$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv^{ce} simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2e} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est C^0 sur $[0,1]$ et f ne l'est pas, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv^{e} pas uniformément sur $[0,1]$.

Cet argument ne marche pas sur $[0,1[$. On peut calculer $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)|$ mais c'est pénible.

- Considérons $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

On a $\forall n \in\mathbb{N}^*$ $x_n \in [0,1[$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{(1-\frac{1}{n})^n e^{-x_n}}{1+(1-\frac{1}{n})^n}$

or $(1-\frac{1}{n})^n = \exp(n\ln(1-\frac{1}{n})) \underset{+\infty}{=} \exp(n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(-1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$

donc $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ $\left(\dfrac{\overbrace{x_n^n}^{\to 1/e} e^{-x_n} \nearrow 1/e}{\underbrace{1+x_n^n}_{\searrow 1/e}} \to \dfrac{1}{e^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{e}} = \dfrac{1}{e(e+1)} \right.$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas u^{t} sur $[0,1[$

- $\forall x \in [0,a]$ $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n} \leq \dfrac{a^n e^{-x}}{1+x^n} \leq \dfrac{a^n e^{-0}}{1+x^n} \leq \underbrace{a^n}_{\text{indep. de } x}$

donc $0 \leq \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv^{ce} u^{t} vers f sur $[0,a]$

Ex IV ⓐ Soit $x_0 \in [0,1]$ fixé

Si $x_0 \neq 0$ $f_n(x_0) = \frac{2^n x_0}{1+2^n n x_0^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n x_0}{2^n n x_0^2} = \frac{1}{n x_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x_0 = 0$ $f_n(x_0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

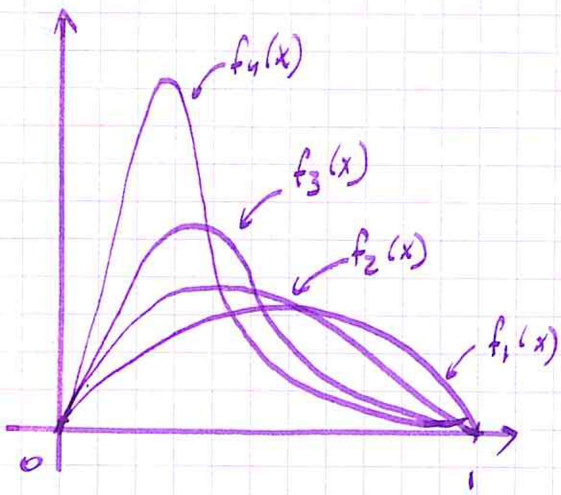
ⓑ $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \left[\frac{1}{2n}\ln(1+2^n n x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln[1+2^n n]$

$= \frac{1}{2n}\left[\ln\left(2^n n\left(\frac{1}{2^n n}+1\right)\right)\right]$

$= \frac{1}{2n}\left[n\ln 2 + \ln(n) + \ln\left(\frac{1}{2^n n}+1\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\ln 2}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas u^t sur $[0,1]$



La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a "une bosse" qui devient de + en + haute et étroite

cas c'est à cause de cet effet que l'on peut avoir $\forall x_0 \in [0,1]$

$f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et pourtant

$\int_0^1 f_n(x_0)dx \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

(en ajustant la hauteur et la largeur de la bosse, on peut faire des fonctions f_n qui cv^e simplement vers 0 et t.q $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$

ⓒ Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n}}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0,1]$

et

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{\frac{2^n}{n}}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Ex V   Soit $x_0 \in [-1,1]$ fixé

(a) • si $x_0 \neq 0$ $\quad \frac{x_0}{1+n^2x_0^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv simplement sur $[-1,1]$ vers $f=0$

• si $x_0 = 0$ $\quad f_n(x_0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\forall x \in [-1,1]$ $\quad |f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1+n^2x^2}$

$x \mapsto \frac{|x|}{1+n^2x^2}$ étant paire, il suffit de l'étudier sur $[0,1]$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

	0		$1/n$		1
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

donc $\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1/n}{1+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t sur $[-1,1]$ vers f

(b) Soit $x_0 \in [-1,1]$ fixé

si $x_0 \neq 0$ $\quad f_n'(x_0) = \frac{1-n^2x_0^2}{(1+n^2x_0^2)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

si $x_0 = 0$ $\quad f_n'(x_0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv simplement sur $[-1,1]$ vers h :

$$h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1]\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n' est C^0 sur $[-1,1]$ et h ne l'est pas.

Donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne cv pas u^t sur $[-1,1]$.

Remarque : On voit là bien que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ et ça même si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv u^t sur $[-1,1]$!!

Pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion de la limite et de la dérivée il faut la cv u^t, mais sur $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$!!! (sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seulement ce n'est pas suffisant).

c. On remarque que $g_n'(x) = \frac{2n^2 x}{2n^2(1+n^2x^2)} = f_n(x)$

donc $(g_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t vers $f \equiv 0$ sur $[-1,1]$

Pour en déduire la cv^{ce} u^t de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il suffit d'étudier cette dernière en un point

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad g_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc

i. $(g_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t sur $[-1,1]$

ii. $\exists x_0 \in [-1,1]$ t.q. $(g_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce}

et $[-1,1]$ est un intervalle. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t sur tout borné de $[-1,1]$ (donc sur $[-1,1]$) vers une fonct$^{\circ}$ g dérivable et t.q. $\forall x\in[-1,1]$

$g'(x) = f(x) = 0$. Donc g est c^{te} sur $[-1,1]$

Donc $\forall x\in[-1,1]\quad g(x) = g(0) = 0$

Ex VI $\quad \forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1/n}{1+\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Donc $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x) - 0| \leq \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t sur $\mathbb{R}$ vers $f\equiv 0$

De +, $f_n(0) = \frac{1}{n}\arctan(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc i. $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t sur $\mathbb{R}$

ii. $\exists x_0 \in\mathbb{R}$ t.q. $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce}

$\mathbb{R}$ est un intervalle, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv^{ce} u^t sur tout sous ensemble borné de $\mathbb{R}$ (vers une fonct$^{\circ}$ f t.q. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = 0$ càd f est c^{te} donc $f(x) = f(0) = 0\ \forall x$).