Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L3- Automne 2015

Série d'exercices n°5/6
Interpolation polynomiale

Exercice 1. *Formule des Différences Divisées (Un Classique)*
Nous supposons que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $n + 1$ fois continûment différentiable. La formule de Newton qui consiste à écrire le polynôme P_n aux points x_0 ,..., x_n sous la forme

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}),$$

permet de construire le polynôme P_n à l'aide d'une récurrence. En effet,

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k).$$

Autrement dit, connaissant P_{n-1}, il suffit de calculer a_n pour connaître P_n.

a) Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points distincts $(x_i)_{1\le i\le n}$ est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i] \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k),$$

où $f[.]$ désigne les différences divisées de f définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f[x_i] & = & f(x_i), \\ f[x_0, ..., x_k] & = & \dfrac{1}{x_k - x_0}(f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]), \end{array}\right. \quad \text{pour tout } i = 0, ..., n.$$

Montrer ensuite que $f[x_0, ..., x_n]$ est invariant par permutations.

b) Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

c) Montrer que

$$|P - n(x) - f(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_n(x)|,$$

où

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \text{et} \quad \pi_n(x) = \prod_{i=0}^{i-1}(x - x_i).$$

N.B. : Remarquons bien ici que l'estimation n'est pas forcément quelque chose de petit (voir Phénomène de Runge).

Application.
Trouver l'interpolation de Lagrange de la fonction $x \to f(x) = \sin(\pi x/2)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Puis à l'aide des questions précédentes établir une estimation d'erreur.

Exercice 2. *Convergence de l'interpolatio de Lagrange* Soit L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

aux $n + 1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f.
2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n + 1$ points $x_0, ..., x_n$ sont équidistants, nous avons alors
$$\lim_{n \to +\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$
3. Considérons toujours la fonction f
$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
aux $n + 1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ équidistants de l'intervalle $[-1, 1]$. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
Écrire l'approximation de Lagrange de degré 1, f_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n - 1$
4. Montrer que si $\alpha \neq [-1, 1]$, nous avons
$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$
et donc que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. *Interpolation Polynomiale de Hermite*
Soient $x_0, ..., x_n$, $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b)$ et f de classe $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction dont on connaît les valeurs et celles de sa dérivée en ces $(n + 1)$ points distincts.
Nous cherchons un polynôme H_n de degré minimal tel que

$$H_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{et } H_n'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Nous rappelons que les fonctions de base de l'interpolation de Lagrange, c'est à dire les polynômes de degré n tels que $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 0, ..., n$ sont donnés pour tout $i = 0, ..., n$ par

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :
"Le polynôme H_n s'écrit

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{h}_i(x)$$

avec

$$h_i(x) = (1-2)l_i'(x_i)(x - x_i))l_i^2(x), \quad \text{et} \quad \tilde{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x).$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2(n+1))}\|_\infty}{(2n+2)!} \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)^2."$$

1. Montrer que pour $i, j = 0, ..., n$

   $$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h_i'(x_j) = 0,$$

   et

   $$\tilde{h}_i(x_j) = 0, \quad \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}.$$

2. En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré $2n + 1$ vérifiant les conditions requises.
3. En déduire une majoration de l'erreur $|f(x) - H_n(x)|$.

<u>Exercice 4.</u> *Moindre carrés discrets*
Nous rappelons tout d'abord le théorème de la projection sur un sous-espace vectoriel :
"Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors il existe un unique $v^* \in F$ tel que

$$\|v^* - y\| = \min_{v \in F} \|v - y\|.$$

De plus, v^* est la projection orthogonale de y sur l'espace F : $v^* = P_F y$ est telle que

$$(v^* - y, v) = 0, \, v \in F."$$

Objectif de l'exercice : soient $\varphi_1(x) = 1$ et $\varphi_2(x) = x$ et $\varphi_3(x) = x^2$. Nous recherchons le polynôme de degré 2 qui approche le mieux le nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 4}$ suivant :

$$(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2).$$

Autrement dit, nous souhaitons trouver $\varphi^* \in V := vect(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ telle que

$$\sum_{i=1}^{4} |\varphi^*(x_i) - y_i|^2 = \min_{\psi \in V} \sum_{i=1}^{4} |\psi^*(x_i) - y_i|^2$$

1. Tracer le nuage de points.
2. Écrire le polynôme $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{3} u_j \varphi_j(x)$ et expliciter le problème sous la forme :
   "trouver $v^* \in F$ solution de
   $$\|v^* - y\| = \min_{v \in F} \|v - y\|, \textit{ où } y = (y_1, ..., y_4)^T, \textit{ et } F = \{v \in \mathbb{R}^4, v = Bu, u \in \mathbb{R}^3\}.\text{"}$$
3. Montrer que ce problème admet une solution unique $v^* \in F$.
4. Montrer que si $v^* \in F$ est solution, alors il existe un unique $u^* \in \mathbb{R}^3$ solution de
   $$B^T B u = B^T Y.$$
5. Montrer que B est de rang 3. En déduire alors que $B^T B$ est définie positive.
6. Expliciter la solution du problème.

<u>Exercice 5.</u> *Polynôme de Chebychev*
Soit $n \in \mathbb{N}$, nous définissons le polynôme de Chebychev de première espèce par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1].$$

1. Montrer que les fonctions T_n satisfont la formule de récurrence
   $$\begin{cases} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$
2. Montrer ensuite que les polynômes $T_n(x)$ sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1-x^2)^{-1/2}$,
   $$\int_{-1}^{1} T_n(x - T_m(x)) \frac{dx}{(1-x^2)^{-1/2}} = \begin{cases} \pi, & \text{si} \quad n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad n = m \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq m. \end{cases}$$
3. Montrer que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1}.
4. Nous posons $t^n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$, $y_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $k = 0, ..., n$, calculer $t^n(y_k)$.
5. Soient $x_1, ..., x_n$, n points quelconques de $[-1, 1]$. Nous posons $w_n(x) = (x-x_1)...(x-x_n)$. Supposons par l'absurde que $\|w_n\|_\infty < \|t^n\|_\infty$. Montrer alors que
   $$\begin{cases} t^n(y_k) - w_n(y_k) > 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{pair}, \\ t^n(y_k) - w_n(y_k) < 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{impair}. \end{cases}$$
6. En déduire que $\|w_n\|_\infty \geq \|t^n\|_\infty$.
7. Application : Soit L_{n-1} le polynôme de Lagrange de la fonction f définie pour tout $x > 2$ par $f(x) = \ln(x+2)$ aux points racines du polynôme de Chebychev T_n. Déterminer n tel que
   $$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\ln(x+2) - L_{n-1}(x)| \leq 2^{-10}.$$

Correction des exercices

Exercice 1.

a) * Montrons que le polynôme de Lagrange est unique. Soit Q_n un autre polynôme solution de (1). Alors, nous avons pour $i = 0, ..., n$

$$P_n(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0.$$

Ainsi, $P_n - Q_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en $n+1$ points. Il est donc identiquement nul.

* Les coefficients $a = (a_i)_{0 \le i \le n}$ sont solutions d'un système linéaire

$$M\, a = y,$$

avec $y_i = f(x_i)$ et M la matrice de Vandermonde dont le determinant est non nul. Les coefficients $(a_i)_{0 \le i \le n}$ sont donc définis de manière unique.

* Montrons que pour tout $n \geq 0$, le coefficient $a_n = f[x_0, \ldots, x_n]$. Nous faisons la démonstration par récurrence sur le nombre de points x_i. Nous vérifions d'abord que la formule est vraie à l'ordre $n = 1$

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0] + (x - x_0)\, \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Nous supposons ensuite que la formule est vraie à l'ordre $n - 1$; nous avons alors

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{n-1}(x) + a_n \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, .., x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \;+\; a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k). \end{aligned}$$

Il reste à calculer a_n. Considérons donc

$$Q(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0}\, Q_{n-1}(x) \;+\; \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P_{n-1}(x),$$

où

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1, ..., x_i] \prod_{k=1}^{i-1} (x - x_k)$$

est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1, ..., x_n$. Nous vérifions immédiatement que pour tout $i = 0, ..., n$

$$Q(x_i) = f(x_i).$$

Ainsi, puisque Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, nous avons $P_n \equiv Q$. Or, cette nouvelle expression de P_n permet de déterminer le coefficient de x^n de P_n

$$a_n = \frac{1}{x_n - x_0} f[x_1, ..., x_n] - \frac{1}{x_n - x_0} f[x_0, ..., x_{n-1}] = f[x_0, ..., x_n].$$

* La formule des différences divisées est dont stable par permutation. En effet, permuter les x_i ne change pas le polynôme d'interpolation et donc ne change pas le coefficient du terme de plus haut degré a_n.

b) Nous introduisons la fonction $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$. D'une part, la fonction E s'annule en $n+1$ points distincts. D'après le théorème de Rolle, puisque E_n est continue et dérivable, sa dérivée E'_n s'annule en au moins n points,..., $E_n^{(n)}$ est continue et s'annule en un point $\xi \in [a, b]$, c'est-à-dire

$$f^{(n)}(\xi) = P_n^{(n)}(\xi).$$

D'autre part, comme P_n est de degré n , nous savons que $P_n^{(n)}(\xi) = a_n\, n!$, où a_n est le coefficient de x^n, soit ici $a_n = f[x_0, ..., x_n]$.

Par transitivité, nous obtenons le résultat

$$f[x_0, ..., x_n] = a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

c) Soit $x \in [a, b]$, nous introduisons Q le polynôme d'interpolation aux points x_0,...,x_n et x. D'après la formule de Newton, ce polynôme est donné au point x par

$$Q(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_n, x]\pi_n(x).$$

Or, puisque $Q(x) = f(x)$ nous avons

$$f(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_n, x]\pi_n(x).$$

Finalement, en appliquant le résultat de **b)**, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_n(x).$$

D'où le résultat en passant au sup

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x - x_i|.$$

Application Le polynôme de Lagrange est donné par la formule générale

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]\prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k)$$

et $f[x_0, \ldots, x_n]$ se calcule par récurrence.

Dans cet exercice nous avons

$$f(x_0 = 0) = 0,\ f(x_1 = 1) = 1,\ f(x_2 = 2) = 0,$$

et donc $f[x_0] = 1$, $f[x_0, x_1] = 1 - 0/(1-0) = 1$ et $f[x_0, x_1, x_2] = (-1-1)/2 = -1$, ce qui donne

$$P_2(x) = 0 + 1\,(x-0) - 1\,(x-0)(x-1) = x - x^2 + x = -x^2 + 2\,x.$$

D'après la formule du cours nous avons pour tout $x \in [0, 2]$

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!}x(x-1)(x-2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{1}{2}\frac{\pi^3}{48},$$

puisque nous vérifions facilement que pour tout $x \in [0, 2]$

$$|x\,(x-1)\,(x-2)| \leq 1/2.$$

Exercice 2.

a) Nous calculons les dérivées successives

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3}$$

et plus généralement

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(x-\alpha)^{n+2}}.$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} = \frac{|(-1)^{n+1}|}{(\eta-\alpha)^{n+2}}$$

b) Nous appliquons le résultat du cours : il existe $\eta \in [-1,1]$

$$|f(x) - L_n(x)| \;=\; \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|.$$

Ainsi, si $\alpha > 3$, nous avons pour $\eta \in [-1,1]$

$$2 < |\eta - \alpha| = \alpha - \eta < 4$$

$$\leq \frac{1}{(\eta-\alpha)^{n+2}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{|\eta-\alpha|^{n+1}}$$

et

$$\frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{|\eta-\alpha|^{n+1}}$$

et donc

$$|f(x) - L_n(x)| \;=\; \frac{1}{2}\prod_{i=0}^{n}\left|\frac{x-x_i}{\eta-\alpha}\right|.$$

Or, pour tout $x \in [-1,1]$ et $i \in \{0,\ldots,n\}$, nous avons $|x - x_i| \leq 2$ et donc

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2}\prod_{i=0}^{n}\frac{|x-x_i|}{|\eta-\alpha|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha-\eta}\right)^{n+1}.$$

$2 < \alpha - \eta < 4$

$\frac{1}{4} < \frac{1}{\alpha-\eta} < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{\alpha-\eta} < 1$

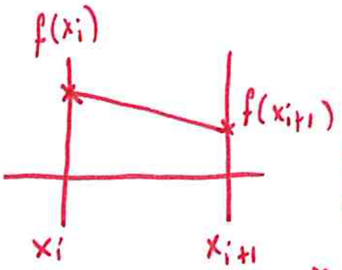
donc puisque $2/(\alpha-\eta) < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x) - L_n(x)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\alpha-\eta}\right)^{n+1} = 0.$$

c) Considérons $\alpha \notin [-1,1]$, ainsi la fonction f est bien définie sur $[-1,1]$, sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x_i-\alpha} + \frac{(x-x_i)}{h}\left(\frac{1}{x_{i+1}-\alpha} - \frac{1}{x_i-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{x_i-\alpha} - (x-x_i)\frac{1}{(x_{i+1}-\alpha)(x_i-\alpha)} \end{aligned}$$

ok



$y = mx + p$

$f(x_{i+1}) = m\,x_{i+1} + p$

$f(x_i) = m\,x_i + p$

$m = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ et $f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,x_i + p$ (cf dos page 8)

$$f_n(x) = m x + p$$

$$= \frac{1}{\underset{\underset{x_{i+1}-x_i}{\parallel}}{h}}\left[\frac{1}{x_{i+1}-\alpha} - \frac{1}{x_i-\alpha}\right]\left(x \cancel{\frac{1}{x_i-\alpha}} - x_i\right) + \frac{1}{x_i-\alpha}.$$

OK

d) Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous appliquons l'estimation d'erreur

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{|f''(\xi_x)|}{2}|(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

Or la fonction $(x - x_i)(x_{i+1} - x)$ atteint son maximum en $(x_i + x_{i+1})/2$ et donc

$x \mapsto (x - x_i)(x_{i+1} - x)$

max en $\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$ et vaut $\overset{h/2}{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)}\overset{h/2}{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)}$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}h^2$$

avec $h = 2/n$. Ainsi cette nouvelle approximation est bien meilleure que celle obtenu dans la question **b)** précédente!!

Correction de l'Exercice III.

a) Soit P_n le polynôme de Lagrange de degré n interpolant la fonction f (définie sur $[a,b]$) aux points $x_0, \ldots, x_n$ satisfait l'estimation

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}|(\eta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|, \quad \eta \in [a,b].$$

Ainsi

$$|\int_a^b f(x) - P_n(x) dx| \le \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \le \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| dx.$$

Pour la méthode des rectangles nous prenons $n = 0$ et $\xi = a$ ou $\xi = b$, l'erreur est alors donnée par

$$|I_{rect} - I| \le |f'(\eta)| \int_a^b |x - a| dx = |f'(\eta)| \frac{(b-a)^2}{2}.$$

b) Nous construisons le polynôme de Lagrange P_1

$$P_1(x) = f(a) + (x-a)\,\frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

et avons alors

$$|f(x) - P_1(x)| = \frac{|f''(\eta)|}{2}\,(x-a)(x-b).$$

sup η

D'abord, nous vérifions que

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x)\,dx &= (b-a)\,[f(a) + \frac{1}{2}\,(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}] \\ &= (b-a)[f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Donc

sup η

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(x)dx \;-\; (b-a)[f(a)+f(b)]| &\le \frac{1}{2}|f''(\eta)| \int_a^b (x-a)(b-x)dx \\ &\le \frac{1}{2}|f''(\eta)| \int_a^b [-x^2 + (b-a)x - ab]dx \\ &= \frac{1}{2}|f''(\eta)|\,\frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

sup η

et finalement

$$|\int_a^b f(x)dx \;-\; (b-a)[f(a)+f(b)]| \le |f''((\eta)|\,\frac{(b-a)^3}{12}$$

c) D'abord, nous décomposons l'intégrale

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Puis appliquons la méthode des trapèzes sur chaque intervalle

$$I_h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\,(f(x_i) \;+\; f(x_{i+1}))$$

ce qui donne

$$I_h = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

L'erreur est donnée par

$$|I - I_h| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^3 \frac{f^{(2)}(\xi_i)}{12} \leq h^2 \frac{(b-a)}{12} \|f^{(2)}\|_\infty.$$

Correction de l'Exercice IV.

a) *Preuve du Théorème de la projection.* Soit $y \in I\!R^{n+1}$ et F un sous-espace vectoriel de $I\!R^{n+1}$, nous notons d la distance usuelle de $I\!R^{n+1}$, nous définissons alors

$$d(y, F) = \inf_{v \in F} \|y - v\|.$$

Puisque $y \in F$ et F est un ensemble fermé de $I\!R^{n+1}$ alors il existe une suite $(v_k)_{k \in I\!N}$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} \|y - v_k\| = d(y, F).$$

Nous voulons démontrer que la suite $(v_k)_{k \in I\!N}$ est une suite de Cauchy. D'une part par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in I\!N$ tel que pour tout $k \geq N_\varepsilon$

$$\|y - v_k\| \leq \varepsilon$$

et donc pour tout k et $l \in I\!N$,

$$\|v_k - v_l\| \leq \|y - v_k\| + \|y - v_l\| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, $(v_k)_{k \in I\!N}$ est une suite de Cauchy, et puisque $F \subset I\!R^{n+1}$ est complet, il existe $v^* \in F$ tel que $v_k \to v^*$ et donc

$$\|y - v^*\| = d(y, F) = \inf_{v \in F} \|y - v\|.$$

De plus, sa limite est unique: soit v^* et w^* deux éléments réalisant le minimum; alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v^* - w^*\|^2 &= 2\|v^* - y\|^2 + 2\|y - w^*\|^2 - 4\|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|^2, \\ &= 4\,[d(y, F)]^2 - 4\|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|^2. \end{aligned}$$

Or, puisque F est un espace vectoriel, $(v^* + w^*)/2 \in F$ et

$$d(y, F) \leq \|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|,$$

donc

$$0 \leq \|v^* - w^*\|^2 \leq 4\,[d(y, F)]^2 - 4\,[d(y, F)]^2 = 0.$$

Ainsi, la limite est unique.

Nous posons alors $v^* = P_F(y)$, soient $v \in F$ et $\lambda \in I\!R$ alors $v^* + \lambda v \in F$

$$\|y - (v^* + \lambda v\|^2 = \|y - v^*\|^2 - 2\lambda\,(y - v^*, v) + \lambda^2 \|v\|^2,$$

il vient donc pour tout $\lambda \in I\!R$

$$-2\lambda(y-v^*,v)+\lambda^2\|v\|^2\leq 0.$$

En prenant d'une part $\lambda > 0$, nous avons aussi

$$-2(y-v^*,v)+\lambda\|v\|^2\leq 0$$

et ensuite en faisant tendre λ vers zéro, nous obtenons le résulat : pour tout $v \in F$

$$(y-v^*,v)\leq 0.$$

Finalement, puisque F est un espace vectoriel $-v$ appartient ausi à F et donc : pour tout $v \in F$

$$(y-v^*,v)=0.$$

$\square$

b) Nous remarquons que $\sum_{i=1}^4 |v_i|^2$ est la norme euclidienne au carré du vecteur $v \in I\!R^4$. En introduisant $\phi(x)=\sum_{j=1}^3 u_j\phi_j(x)$, nous avons $\phi(x_i)=\sum_{j=1}^3 u_j\phi_j(x_i)\equiv B\,u$ avec avec

$$B=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^4 |\phi(x_i)-y_i|^2 = \|B\,u - y\|^2.$$

avec $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$. Ensuite, en notant $v = Bu \in I\!R^4$, nous recherchons $v^* \in F := \{v \in I\!R^4, v = B\,u;\quad u \in I\!R^3\}$ et le problème devient

$$\|v^*-y\|^2=\min_{v\in F}\|v-y\|^2.$$

En appliquant le théorème de la projection, nous montrons que ce problème admet une solution unique, donnéée par

$$(v^*-y,v)=0,\quad \forall v\in F$$

Attention v^* est unique mais pas u^* la solution du problème initial.

c) Comme $v^* \in F$, il existe $u^* \in I\!R^3$ tel que $v^* = Bu^*$ et

$$(Bu^*-y,v)=0,\quad \forall v\in F$$

qui s'écrit aussi

$$\sum_{i=1}^4 (Bu^*-y)_i\,(Bu)_i=0,\quad \forall u\in I\!R^3$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} B_{i,j}u_j^* - y_i\right)\sum_{k=1}^{3} B_{i,k}u_k = \sum_{k=1}^{3}\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} B_{i,k}\,B_{i,j}u_j^*\right) - \sum_{i=1}^{4} B_{i,k}y_i\right)u_k = 0, \quad \forall u \in I\!R^3$$

ce qui signifie que

$$(B^T Bu^* - B^T y\,,\, u) = 0, \quad u \in I\!R^3.$$

Et donc $B^T\,Bu^* = B^T\,y$.

c) La matrice B est de rang 3, c'est-à-dire $dim(ImB) = dimF = 3$. Or, nous savons que pour une application linéaire $f : E \to F$

$$dim(Imf) + dim(Kerf) = dim(E)$$

donc ici

$$dim(ImB) + dim(KerB) = dim(I\!R^3) = 3$$

donc $KerB = \{0\}$. et B est injective. Nous en déduisons que $B^T B$ est symétrique définie positive et donc inversible. Il existe donc un unique $u^* \in I\!R^3$ solution du problème initial

d) Nous avons ici

$$B^T B = \begin{pmatrix} 4 & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

et

$$B^T Y = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i^2 y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons alors la solution $u_1 = 3/10$, $u_2 = -1/10$ et $u_3 = 1/2$. La fonction minimisante s'écrit

$$\phi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{10} + \frac{3}{10}.$$

Exercice 4.

preuve fausse !

Commençons par la

preuve du Théorème de la projection. Soit $y \in H$ et E un sous-espace vectoriel de H, nous notons d la distance usuelle de H,

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

où $\|.\|$ est la norme formée à partir du produit scalaire de H. Nous définissons alors

$$d(y, E) = \inf_{v \in E} \|y - v\|.$$

Puisque $y \in H$ et E est un ensemble fermé de H alors il existe une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} \|y - v_k\| = d(y, F).$$

Nous voulons démontrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. D'une part par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_\varepsilon$

$$\|y - v_k\| \leq \varepsilon/2$$

et donc pour tout k et $l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq N_\varepsilon$

$$\|v_k - v_l\| \leq \|y - v_k\| + \|y - v_l\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et puisque $E \subset H$ est complet, il existe $v^* \in E$ tel que $v_k \to v^*$ et donc

$$\|y - v^*\| = d(y, E) = \inf_{v\in E} \|y - v\|.$$

De plus, sa limite est unique: soit v^* et w^* deux éléments réalisant le minimum; alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v^* - w^*\|^2 &= 2\|v^* - y\|^2 + 2\|y - w^*\|^2 - 4\|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|^2, \\ &= 4\,[d(y,E)]^2 - 4\|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|^2. \end{aligned}$$

Or, puisque E est un espace vectoriel, $(v^* + w^*)/2 \in E$ et

$$d(y, E) \leq \|y - \frac{v^* + w^*}{2}\|,$$

donc

$$0 \leq \|v^* - w^*\|^2 \leq 4\,[d(y,E)]^2 - 4\,[d(y,E)]^2 = 0.$$

Ainsi, la limite est unique.

Nous posons alors $v^* = P_E(y)$, soient $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $v^* + \lambda v \in E$

$$\|y - (v^* + \lambda v\|^2 = \|y - v^*\|^2 - 2\lambda\,(y - v^*, v) + \lambda^2\|v\|^2,$$

il vient donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$-2\lambda\,(y - v^*, v) + \lambda^2\|v\|^2 \leq 0.$$

En prenant d'une part $\lambda > 0$, nous avons aussi

$$-2\,(y - v^*, v) + \lambda\|v\|^2 \leq 0$$

et ensuite en faisant tendre λ vers zéro, nous obtenons le résulat : pour tout $v \in F$

$$(y - v^*, v) \leq 0.$$

Finalement, puisque E est un espace vectoriel $-v$ appartient ausi à E et donc : pour tout $v \in E$

$$(y - v^*, v) = 0.$$

□

$P(x_i)$
$\shortparallel$

a) En introduisant $P(x) = \sum_{j=0}^m u_j \phi_j(x)$, nous avons $\phi(x_i) = \sum_{j=0}^m u_j \phi_j(x_i) \equiv (B\,u)_i$ avec avec $B \in \mathcal{M}_{n,m+1}(I\!R)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix}$$ ok

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \,|P(x_i) - y_i|^2 \;=\; \|B\,u \;-\; y\|_D^2.$$

avec $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in I\!R^n$. $= \sum \alpha_i \,|(Bu)_i - y_i|^2 = \|Bu - y\|^2$

b) Ensuite, en notant $v = B\,u \in I\!R^n$, nous recherchons $v^* \in F := \{v \in I\!R^n, v \;=\; B\,u; \quad u \in I\!R^{m+1}\}$ et le problème devient

$$\|v^* - y\|_D^2 = \min_{v \in F} \|v - y\|_D^2.$$

c) Nous sommes donc dans le bon cadre pour appliquer le théorème de la projection. Ainsi, nous montrons que ce dernier problème admet une solution unique, donnée par

$$(v^* - y, v) = 0, \quad \forall v \in F$$

$\cancel{(v^*, v) = (y, v) \Longrightarrow B\;Bu^* =}$ $\Longrightarrow$ 4 ambo:

ou encore

$$\boxed{B^T D B u^* = B^T D y.}$$

en effet **Attention v^* est unique mais ~~(pour l'instant)~~ pas u^* la solution du problème initial.**

d) B est une matrice à $m+1$ colonnes et n lignes avec $m \le n-1$ donc $Rang(B) \le m+1$. Or, en ne retenant que les $m+1$ premières lignes de B, on reconnait la matrice de Vandermonde, et puisque les points x_i sont tous distincts, on a $Rang(B) = m+1$.

Comme $v^* \in F$, il existe $u^* \in I\!R^{m+1}$ tel que $v^* = Bu^*$ et

$$(Bu^* - y, v)_D = 0, \quad \forall v \in F$$

qui s'écrit aussi

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \,(Bu^* - y)_i\,(Bu)_i = 0, \quad \forall u \in I\!R^{m+1}$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=0}^m B_{i,j} u_j^* \;-\; y_i \right) \sum_{k=0}^m B_{i,k} u_k = \sum_{k=0}^m \left(\left(\sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i \, B_{i,k} \, B_{i,j} u_j^* \right) \;-\; \sum_{i=1}^n \alpha_i \, B_{i,k} y_i \right) u_k = 0, \quad \forall u \in I\!R^m$$

ce qui signifie que

$$(B^T D B u^* - B^T \,Dy \,,\, u) = 0, \quad u \in I\!R^{m+1}.$$

Et donc $B^T \,D\,Bu^* = B^T \,D\,y$.

c) comme $v^* \in F$
$\exists u^* \in \mathbb{R}^n$ t.q. $v^* = Bu^*$

<u>donc</u> $(Bu^* - y, v) = 0 \quad \forall v \in F$

c.a.d $\sum_{i=1}^{n} (Bu^* - y)_i \cdot (Bu)_i = 0$ $\quad \alpha_i \neq 0$ $\alpha_i > 0$.

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}$

d) La matrice B est de rang $m+1$, c'est-à-dire $dim(ImB) = dimF = \overset{m+1}{\cancel{3}}$. Or, nous savons que pour une application linéaire $f : E \to F$

$$dim(Imf) + dim(Kerf) = dim(E)$$

donc ici

$$dim(ImB) + dim(KerB) = dim(I\!R^{m+1}) = m+1$$

donc $KerB = \{0\}$ et B est injective. Nous en déduisons que $B^T B$ est symétrique définie positive

$$y\, B^T\, D\, B\, y = (B\, y)^T\, D\, By = \|D^{1/2}\, By\|^2_{I\!R^{m+1}}.$$

Par injectivité de B et puisque $\alpha_i > 0$, la matrice $B^T\, D\, B$ est bien définie positive et donc inversible. Il existe donc un unique $u^* \in I\!R^{m+1}$ solution du problème initial

e) Nous avons ici

$$B^T\, DB = \begin{pmatrix} 4 & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

et

$$B^T\, D\, y = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i^2 y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons alors la solution $u_1 = 3/10$, $u_2 = -1/10$ et $u_3 = 1/2$. La fonction minimisante s'écrit

$$\phi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{10} + \frac{3}{10}.$$

Exercice 5.

a) Posons $\theta(x) = \arccos(x)$, nous obtenons alors

$$T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1)\theta\right) = \cos\left(n\,\theta\right)\,\cos\left(\theta\right) - \sin\left(n\,\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)$$

et

$$T_{n-1}(x) = \cos\left((n-1)\theta\right) = \cos\left(n\,\theta\right)\,\cos\left(\theta\right) + \sin\left(n\,\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)$$

Ainsi,

$$T_{n+1}(x)\; +\; T_{n-1}(x) \;=\; 2\,\cos\left(n\,\theta\right)\,\cos\left(\theta\right) = 2\,x\,T_n(x).$$

Rappel: $\int \cos(au)\cos(bu)\,du = \dfrac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \dfrac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C^{te}$

Aussi, par changement de variable $\theta = \arccos(x)$, nous avons

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\,\cos(m\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \pi, & \text{si } m = n = 0 \\ \pi/2, & \text{si } m = n \geq 0 \end{cases}$$

b) Montrons ensuite que T_n est bien un polynôme de degré n. Pour cela, nous précédonc par récurrence: T_0 est un polynôme de degré zéro et T_1 est bien un polynôme de degré un. Nous supposons alors que pour $k \geq 1$, T_{k-1} (*resp.* T_k) est un polynôme de degré $k-1$ (*resp.* k) et le coefficient devant le terme de plus haut degré de T_k est donné par 2^{k-1}; alors en utilisant la formule de récurrence

$$T_{k+1}(x) \;=\; 2\,x\,T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

nous avons bien que T_{k+1} est un polynôme de degré $k+1$ et le coefficient devant le terme de plus haut degré est donné par $2 \times 2^{k-1} = 2^k$.

c) Le polynôme T_n vérifie

$$T_n\left(\cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)\right) \;=\; (-1)^k$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$ et de plus

$$T_n\left(\cos\left(\frac{(2\,k\,+\,1)\,\pi}{2\,n}\right)\right) \;=\; 0$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

d) et e) La formule de l'erreur de l'interpolation de Lagrange en un point $x \in [a,b]$ montre que l'erreur de l'interpolation d'une fonction f est un produit de la $(n+1)$-ème dérivée de f évaluée en un point avec l'expression $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ qui ne dépend que de la répartition de points sur l'intervalle de résolution.

Un problème intéressant consiste donc à rechercher, pour un n donné, la localisation des points $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$ pour laquelle

$$\mathcal{E} = \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

est minimal.

Nous montrons alors la proposition suivante

Proposition 1 *Soit $w_n(x)$ un polynôme de degré n considéré sur l'intervalle $[-1,1]$ tel que*

$$w_n(x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

et dont le coefficient de x^n est 1 (comme pour le polynôme t^n) et soit $w_n \neq t^n$. Alors, nous avons

$$\max_{x \in [-1,1]} |w_n(x)| > \max_{x \in [-1,1]} |t^n(x)| = 1.$$

Supposons, par l'absurde, que

$$\max_{x \in [-1,1]} |w_n(x)| < \max_{x \in [-1,1]} |t_n(x)|.$$

et considérons la différence $d(x) = w_n(x) - t^n(x)$. Puisque le polynôme t^n atteint ses extrema $+1$ et -1 aux points

$$y_k = \cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n$$

La fonction d fonction s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles fermés

$$\left[\cos\left(\frac{(k+1)\,\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Alors, $d(x)$ possède n zéros dans $[-1,1]$ (si une racine $\alpha \in [-1,1]$ est à l'extrémité de l'intervalle (7), elle doit être comptée deux fois car en un tel point $(t^n)'(\alpha) = 0$ et $w_n'(\alpha) = 0$). D'autre part, puisque $d(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ (le coefficient de x^n est le même pour w_n et t^n), ceci est une contradiction à $d \neq 0$.

f) D'après le résultat du cours, nous avons

$$\|f - L_{n-1}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \|\Pi_{k=1}^{n}(x - x_i)\|_\infty,$$

lorsque les points x_i sont les points de Chebychev, on a

$$\|\Pi_{k=1}^{n}(x - x_i)\|_\infty = \|t^n\|_\infty$$

Pour $n \geq 2$, on a

$$|(\ln(x+2))^{(n)}| = \frac{(n-1)!}{(x+2)^n}$$

et donc

$$\|f - L_{n-1}\|_\infty \leq \frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

D'où $n \geq 10$ convient (mais n'est pas vraiment optimal).