TD 5

Séries de fonctions

1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.

   (b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$.

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$.

2. Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme.

3. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

   (a) Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

4. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

   (a) En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.

   (b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.

5. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

   (a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

   (d) Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

TD 5 SÉRIES DE FONCTIONS

1. a. convergence simple.

* $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ $\boxed{\text{sur } [0,+\infty[}$

, si $x_0 \geq 1$ $\frac{x_0^n}{1+x_0^n} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum \frac{x_0^n}{1+x_0^n}$ diverge grossièrement

donc $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ ne converge pas simplement sur $[0,+\infty[$

* $\boxed{\text{sur } [0,1[}$

Soit $x_0 \in [0,1[$ fixé. $\frac{x_0^n}{1+x_0^n} \underset{+\infty}{\sim} x_0^n$ or $\sum x_0^n$ est une série géométrique

de raison x_0, donc elle cv. De +, $\sum x_0^n$ est à termes positifs donc $\sum \frac{x_0^n}{1+x_0^n}$ cv aussi.
Donc $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ cv simplement sur $[0,1[$, donc aussi sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.

convergence normale de $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$

$\boxed{\text{sur } [0,+\infty[}$

$\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ ne converge pas normalement puisqu'elle ne converge pas simplement

$\boxed{\text{sur } [0,1[}$

On peut calculer le sup

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^n) - nx^{n-1}x^n}{(1+x^n)^2} = n \cdot \frac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \geq 0$$

Donc $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| = f_n(1) = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum_{\cancel{x\in[0,1]}} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ est

grossièrement divergente. Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1[$.

Ou bien: On peut utiliser une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $x_n = 1-\frac{1}{n}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n \in [0,1[$ et $|f_n(x_n)| = \frac{(1-1/n)^n}{1+(1-\frac{1}{n})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} \neq 0$ donc $\sum |f_n(x)|$ div

Donc $\sum_{x\in[0,1[} |f_n(x)|$ diverge.

$\boxed{\text{sur } [0,a] \text{ avec } a \in]0,1[}$

On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|f_n|$ est $\nearrow$ donc $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = |f_n(a)| = \frac{a^n}{1+a^n}$

Or on a vu que pour $a \in]0,1[$ $\sum \frac{a^n}{1+a^n}$ converge. Donc $\sum f_n$ cv normalement sur $[0,a]$

6. <u>cv simple</u> ~~ds~~ $\cancel{\sum \frac{x^2}{n^2+x^3}}$ de $\sum \frac{x^2}{n^3+x^3}$

$\boxed{\text{sur } [0,+\infty[}$.

Soit $x_0 \in [0,+\infty[$ fixé. • si $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_0) = 0$ donc $\sum f_n(x_0)$ cv.

• si $x_0 \neq 0$ $\frac{x_0^2}{n^3+x_0^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x_0^2}{n^3}$

or $\sum \frac{x_0^2}{n^3}$ converge (série de Riemann) et c'est une série à termes positifs donc $\sum \frac{x_0^2}{n^3+x_0^2}$ cv aussi

Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ donc aussi sur $[0,a]$ avec $a>0$

<u>cv normale</u> de $\sum \frac{x^2}{n^3+x^3}$

$\boxed{\text{sur } [0,+\infty[}$ Le plus simple est d'étudier une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = n$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [0,+\infty[$ et $|f_n(x_n)| = \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$ et $\sum \frac{1}{2n}$ diverge

Donc $\sum \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge. Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{\text{sur } [0,a]}$ avec $a>0$

$\forall x \in [0,a]$ $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^3+x^3} \leq \frac{a^2}{n^3+x^3} \leq \frac{a^2}{n^3}$ indep. de x

Donc $0 \leq \sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^3}$ or $\sum \frac{a^2}{n^3}$ converge, donc $\sum \sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)|$ converge

donc $\sum f_n$ cv normalement sur $[0,a]$ avec $a>0$.

c. Soit $x_0 \in]0,+\infty[$ fixé.

$\frac{x_0}{n^3+x_0^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x_0}{n^3}$, or $\sum \frac{x_0}{n^3}$ cv et c'est une série à termes positifs.

Donc $\sum \frac{x_0}{n^3+x_0^{3/2}}$ cv, donc $\sum f_n$ cv simplement sur $]0,+\infty[$.

Et pour $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x_0) = 0$ donc $\sum f_n(x_0)$ cv.

Donc $\sum f_n$ cv simplement sur $[0,+\infty[$.

Pour la convergence normale, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = n^2$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [0,+\infty[$ et $|f_n(x)| = \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$ et $\sum \frac{1}{2n}$ diverge.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$

2.a. sur $[0,+\infty[$: $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ ne cv pas simplement donc ne cv pas u.

sur $[0,1[$ on a vu que $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv pas u. sur $[0,1[$ vers la fonction identiquement nulle,

donc $\sum f_n$ ne cv pas u. sur $[0,+\infty[$

(c'est l'analogue de la div grossière pour la cv u.)

sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$ $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ cv normalement donc u.

b. (+ difficile)

Dire que $\sum \frac{x^2}{n^2+x^3}$ cv u. sur $[0,+\infty[$ signifie que $\sup_{x\in[0,+\infty[} |R_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2+x^3}$. On va minorer ce sup par une suite qui ne tend pas vers 0

$\sup_{x\in[0,+\infty[} |R_n(x)| \geq |R_n(n)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^2}{k^2+n^3} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{n^2}{k^3+n^3} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{n^2}{(2n+1)^3+n^3}$ → indep de k

$= n\left(\frac{n^2}{(2n+1)^3+n^3}\right)$

on coupe la somme pour avoir un objet + facile à manipuler. On choisit de garder n termes pour avoir une expression simple or $n\left(\frac{n^2}{(2n+1)^3+n^3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9} \neq 0$ donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |R_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Donc $\sum f_n$ ne cv pas u! sur $[0,+\infty[$

Par contre, sur $[0,a]$ avec $a>0$, $\sum f_n$ cv normalement, donc u!.

c. C'est pareil $\sup_{x\in[0,+\infty[} |R_n(x)| \geq R_n(n^2) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^2}{k^3+n^3} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

3 (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. $\sum \frac{(-1)^n x_0^2}{x_0^4+n}$ est une série alternée et $\left(\frac{x_0^2}{x_0^4+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

est ↓ vers 0. Donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) On utilise la règle d'Abel uniforme. On pose:

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \alpha_n(x)\, u_n(x)$ où $\alpha_n(x) = \frac{x^2}{x^4+n}$ et $u_n(x) = (-1)^n$

On a: i. $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ↓

ii. Étude de la cv u! de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n'(x) = \frac{1}{(x^4+n)^2}\left(2x(x^4+n) - 4x^3x^2\right)$ a le m signe que:

$2x^5 + 2xn - 4x^5 = 2xn - 2x^5$ qui a le m signe que $n - x^4$.

	0	$n^{1/4}$	$+\infty$
$\alpha_n'(t)$	$+$		$-$
α_n	↗		↘

donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\alpha_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u! vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$

iii: $\forall N\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\right| \leq 1$ indep. de N et de x

donc $\sum f_n$ cv u! sur $\mathbb{R}$

On voit que la règle des séries alternées est un cas particulier de la règle d'Abel ici.

N.B.: Pour la cv u! en cours, on n'a pas donné de "règle uniforme des séries alternées" mais directement la règle d'Abel uniforme.

c. (Par l'absurde)

Si $\exists P \subset \mathbb{R}^*$ t.q. $\sum f_n$ cv normalement sur P, alors $\sum \sup_{x\in P} |f_n(x)|$ cv

donc $\forall x \in P$, $\sum |f_n(x)|$ cv, donc $\sum f_n(x)$ cv absolument.

or $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé $\left|\frac{(-1)^n x_0^2}{x_0^4+n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x_0^2}{n}$ et $\sum \frac{x_0^2}{n}$ diverge et à termes positifs

donc $\sum \left|\frac{(-1)^n x_0^2}{x_0^4+n}\right|$ div.

Donc, il n'y a pas de point $x_0 \in \mathbb{R}^*$ où $\sum f_n(x_0)$ soit abs. cv. ~~Donc~~ il n'y a pas de partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle $\sum f_n$ soit ~~abs.~~ normalement cv.

$\boxed{4}$ a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ on pose :

$f_n(x) = \alpha_n(x) u_n(x)$ avec $\alpha_n(x) = \frac{1}{n+x}$ et $u_n(x) = \sin(nx)$ on a :

i. $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\downarrow$

ii. Pour n assez grand, $0 \leq \sup_{x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2}]} |\alpha_n(x)| \leq \frac{1}{n-\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv u^t vers $\alpha \equiv 0$ sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.

iii. $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \sin(nx)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{inx}\right)\right|$

$$\leq \left|\sum_{n=0}^{N} e^{inx}\right| = \left|\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|}$$

⚠ il faut trouver un majorant indép. de x, donc minorer $|1-e^{ix}|$.

$|1-e^{ix}|^2 = |1-\cos x - i\sin x|^2 = (1-\cos x)^2 + \sin^2 x$ (module au carré)

$= 1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2 - 2\cos x$

$= 2(1-\cos x) \geq 2$

(car $-\cos x \geq 0$ pour $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$)

Donc $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ indép de N et de x

Donc d'après la règle d'Abel uniforme, $\sum f_n$ cv u^t sur $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

b. Cherchons un point de $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ où $\sum f_n$ ne cv$^\circ$ pas abs.

$$\sum |f_n(-\tfrac{\pi}{2})| = \sum \left| \frac{\sin(-n\pi/2)}{n-\pi/2} \right| = \sum \frac{1}{|n-\pi/2|}.$$

Pour n assez grand $\frac{1}{|n-\frac{\pi}{2}|} = \frac{1}{n-\frac{\pi}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ div$^\circ$ et est à termes positifs.

Donc $\sum f_n$ ne cv$^\circ$ pas normalement sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{5}$ a. $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ cv$^\circ$ donc $\sum f_n$ cv$^\circ$ normalement sur $\mathbb{R}$

b. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ cv$^\circ$ normalement donc u.^{t} sur $\mathbb{R}$,

donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$

c. Puisque $\sum f_n$ cv$^\circ$ u.^{t} sur $\mathbb{R}$ $\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{} \left[-\frac{\cos(nx)}{n^4}\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} -\left(\frac{(-1)^n}{n^4} - \frac{1}{n^4}\right)$$

or $\frac{(-1)^n-1}{n^4} = \begin{cases} 0 \text{ si n est pair} \\ -\frac{2}{n^4} \text{ si n est impair} \end{cases}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} -\left(\frac{(-1)^n}{n^4} - \frac{1}{n^4}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2p-1)^4}\right)$

d. Pour utiliser le théo. de dérivation des séries de fonctions, il faut de la cv$^\circ$ u^t sur la série des dérivées !!

$\forall x\in\mathbb{R}$, $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv$^\circ$ donc $\sum f_n'$ cv$^\circ$ normalement, donc u.^{t} sur $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ est un intervalle
- $\sum f_n'$ cv$^\circ$ u.^{t} sur $\mathbb{R}$
- $\exists x_0 \in\mathbb{R}$ t.q. $\sum f_n(x_0)$ cv$^\circ$ (en fait tout x_0 convient)

donc $\sum f_n$ cv$^\circ$ u.^{t} sur tout borné de $\mathbb{R}$ vers une fonction f (ce qu'on savait déjà) qui est dérivable et t.q. $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ (ce qu'on ne savait pas).

$\boxed{6}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée et $\left(\frac{1}{x_0+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît

vers 0, donc elle est cv.

Donc $\forall x_0$, $f(x_0)$ est bien définie.

Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = (-1)^n (x+n)^{-1}$

alors $f_n'(x) = (-1)^{n+1}(x+n)^{-2}$

$f_n''(x) = (-1)^{n+2} . 2 (x+n)^{-3}$

$f_n'''(x) = (-1)^{n+3}\, 3!\, (x+n)^{-4}$

Supposons qu'$\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $f_n^{(N)}(x) = (-1)^{n+N} . N! (x+n)^{-(N+1)}$

alors $f_n^{(N+1)}(x) = (-1)^{n+N+1} (N+1)! (x+n)^{-(N+2)}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k} . k! (x+n)^{-(k+1)}$

or pour $k \geq 1$, $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left| \frac{(-1)^{n+k} k!}{(x+n)^{k+1}} \right| = \frac{k!}{n^{k+1}}$ et $\sum \frac{k!}{n^{k+1}}$ cv

C'est une série de Riemann d'exposant $k+1 > 1$)

Donc pour $k \geq 1$, $\sum (f_n)^{(k)}$ cv normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi u.

Donc d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions

$\forall k \geq 1$ $\sum (f_n)^{(k-1)}$ cv u. sur tout borné de $\mathbb{R}_+$ vers une fonction dérivable

dont la dérivée est $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$

en faisant $k=1$, on voit que f est dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

et si $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(N)}(x) = \sum f_n^{(N)}(x)$ en faisant $k = N+1$, on voit que

$f^{(N)}$ est dérivable et que $f^{(N+1)}(x) = \sum f_n^{(N+1)}(x)$ d'où la conclusion.