TD 7

Développement de fonctions en séries entières

1. On considère l'équation différentielle $f''(x) - 4f(x) = 0$. On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

   Montrer que la seule solution est $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles. Recommencer avec les nouvelles conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 4$.

2. On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

   (a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle
   $$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{1}$$
   (Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)

   (b) Déterminer les solutions de (1) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.

   (c) Montrer que si g est solution de l'équation (1) sur un intervalle I ne contenant pas -1 alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = C(1+x)^\alpha$.

3. Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

4. Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**

   On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

   (c) En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

5. Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\frac{1}{x-5}$, $\frac{1}{1+9x^2}$, $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\ln(5-x)$, $\ln(x^2-5x+6)$.

6. Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\frac{1}{(2+x)^3}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin(x)$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\text{argsh}(x)$.

7. Développer $\ln(x)$ en série entière autour de 1.

TD7 Développement de fonctions en séries entières

I $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit R le rayon de cv de cette série entière

$f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Donc $f''(x) - 4f(x) = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n = 0$

On pose $N = n-2$ dans la 1ère somme et on a:

$$\sum_{N=0}^{+\infty} (N+2)(N+1) a_{N+2} x^N - \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n = 0$$

càd $\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} - 4a_n\right) x^n = 0$

Comme c'est vrai $\forall x \in]-R,R[$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$

$(n+2)(n+1) a_{n+2} - 4a_n = 0$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{4a_n}{(n+1)(n+2)}$ $\quad n=0 \quad a_2 = \frac{4a_0}{1.2} \quad n=1 \quad a_3 = \frac{4a_1}{2.3}$

$n=2 \quad a_4 = \frac{4a_2}{3.4} = \frac{4^2 a_0}{4!} \quad n=3 \quad a_5 = \frac{4a_3}{4.5} = \frac{4^2 a_1}{5!}$

Hypothèse de récurrence: $\forall p \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{2p} = \frac{4^p a_0}{(2p)!} \\ a_{2p+1} = \frac{4^p a_1}{(2p+1)!} \end{cases}$

C'est vrai pour $p = 0, 1, 2$.

Supposons la vraie pour un $p \in \mathbb{N}$ alors

$$a_{2p+2} = \frac{4a_{2p}}{(2p+1)(2p+2)} = \frac{4}{(2p+1)(2p+2)} \cdot \frac{4^p a_0}{(2p)!} = \frac{4^{p+1} a_0}{(2p+1)!}$$

et

$$a_{2p+3} = \frac{4a_{2p+1}}{(2p+2)(2p+3)} = \frac{4}{(2p+2)(2p+3)} \cdot \frac{4^p a_1}{(2p+1)!} = \frac{4^{p+1} a_1}{(2p+3)!}$$

Conclusion : donc c'est vrai $\forall p \in \mathbb{N}$

or $f(0) = 4 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$ et $f'(0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $a_{2p} = \frac{4^{p+1}}{(2p)!}$ et $a_{2p+1} = 0$

donc $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1} x^{2p}}{(2p)!}$

<u>Rappel</u> : On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ ici $f(x) = 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p x^{2p}}{(2p)!} = 4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2p}}{(2p)!}$

$= 4ch(2x)$

Si on recommence avec les nouvelles conditions

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 4$, on a $a_0 = 0$ et $a_1 = 4$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{4^{p+1}}{(2p+1)!}$

et $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)!}$. On sait que $R = +\infty$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ Ici : $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{2p+2} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2p+1}}{(2p+1)!}$

$= 2sh(2x)$

Ex $\boxed{2}$ a) Soit $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

on a alors $\alpha f(x) - (1+x) f'(x) = \alpha f(x) - (1+x) f'(x)$

$= \alpha (1+x)^\alpha - (1+x) \alpha (1+x)^{\alpha - 1} = 0$

<u>N.B.</u> : Pour déterminer l'éq. diff on calcule $f'(x)$

$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$ et on cherche un lien entre f et f'

f' est obtenue en multipliant f par α et en la divisant par $(1+x)$

Donc $(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$ $\Rightarrow$ ce qui donne l'éq. diff.

6. On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Alors si R est son rayon de cv on a $\forall x \in]-R,R[$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n - (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = 0$

On pose $N = n-1$ dans la 2ème somme

$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{N=0}^{\infty} (N+1) a_{N+1} x^N - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = 0$ (on peut rajouter le terme $n=0$ qui vaut 0)

donc $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n - (n+1) a_{n+1} - n a_n) x^n = 0$

Comme c'est vrai $\forall x \in]-R,R[$ on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$

$(\alpha - n) a_n = (n+1) a_{n+1}$, ou encore $a_{n+1} = (\alpha - n) \frac{a_n}{n+1}$

$n=0 \Rightarrow a_1 = \alpha \frac{a_0}{1}$ $\quad$ $n=1 \Rightarrow a_2 = (\alpha-1)\frac{a_1}{2} = \alpha(\alpha-1)\frac{a_0}{1.2}$

$n=2 \Rightarrow a_3 = (\alpha-2)\frac{a_2}{3} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{a_0}{1.2.3}$

Hyp. de récurrence : (en fait le développement de $(1+x)^\alpha$ est donné dans le cours mais sans justification) → cet exercice permet de retrouver ce développement

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - (n-1)) \frac{a_0}{n!}$

C'est vrai pour $n=1$ et 2. Supposons-la vraie pour un $N \in \mathbb{N}^*$ alors

$a_{N+1} = (\alpha - N) \frac{a_N}{N+1} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(N-1))(\alpha-N)\frac{a_0}{(N+1)!}$

donc c'est bien vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)) x^n$

Calculons le rayon de cv de cette série

Par la méthode de d'Alembert

$\left| \frac{1}{(n+1)!} (\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)) \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right| = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc $\boxed{R=1}$

c. Si g est solution de (1) sur un intervalle I ne contenant pas -1, alors

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{1}{f^2(x)}\left(g'(x)f(x) - g(x)f'(x)\right)$$

$$= \frac{1}{f^2(x)}\left(g'(x)(1+x)^\alpha - g(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{(1+x)^\alpha}{f^2(x)}\left(\underbrace{g'(x)(1+x) - \alpha g(x)}_{=0}\right) = 0$$

donc $\frac{g(x)}{f(x)}$ est C^{te} sur I (⚠ ça n'est vrai que parce que I est un intervalle)

$\exists C \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in I \quad g(x) = C(1+x)^\alpha$

Ex $\boxed{3}$ On sait que $\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Donc $\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$ or le rayon de cv de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n$ est 1.

la série ne cv que sur $]-1,1[$ alors que $\frac{1}{1+x^2}$ est défini sur $\mathbb{R}$

Ex $\boxed{4}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2x^{-3}e^{(-x^{-2})}$

$$f''(x) = -6x^{-4}e^{(-x^{-2})} + 4x^{-6}e^{(-x^{-2})}$$

$$= \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{(-x^{-2})}$$

Donc pour $n = 0,1,2$ ~~$\exists P_n$ polynome t.q.~~ $\exists P_n$ polynôme t.q.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{(-x^{-2})}$

Supposons le vrai pour $N \in \mathbb{N}$, alors $f^{(N)}(x) = \frac{P_N(x)}{x^{3N}}e^{(-x^{-2})}$ et

$$f^{(N+1)}(x) = \frac{1}{x^{6N}}\left[P_N'(x)\,x^{3N} - 3N\,x^{3N-1}\right]e^{(-x^{-2})} - \frac{P_N(x)}{x^{3N}}\cdot\frac{2}{x^3}\,e^{(-x^{-2})}$$

$$= \frac{1}{x^{3N+1}}\left[P_N'(x)x - 3N\right]e^{(-x^{-2})} - \frac{1}{x^{3N+3}}\,2P_N(x)\,e^{-x^{-2}}$$

$$= \frac{1}{x^{3N+3}}\left[P_N'(x)x^3 - 3Nx^2 - 2P_N(x)\right]e^{-(x^{-2})}$$

or $P_N'(x)x^3 - 3Nx^2 - 2P_N(x)$ est un polynôme qu'on peut noter P_{N+1}

Donc on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n$ polynôme t.q.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,e^{(-x^{-2})}$

(b) On ne sait pas encore si $f^{(n)}(0)$ existe !!

On le montre par récurrence : $\boxed{n=0}$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(x^{-2})} - 0}{x} = \lim_{X\to\infty} \sqrt{X}\,e^{-X} = \lim_{X\to\infty}\frac{\sqrt{X}}{e^{X}} =$

$X = x^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{X}}$

donc $f'(0)$ existe et vaut 0.

Supposons qu'$\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(N)}(0)$ existe et vaut 0

Alors $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[f^{(N)}(x) - f^{(N)}(0)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{P_N(x)}{x^{3N+1}}\,e^{-x^{-2}}$

$= \lim_{X\to\infty} P_N\!\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right) X^{\frac{3N+1}{2}} e^{-X} = 0 \quad \left(P_N\!\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)\cdot\frac{X^{\frac{3N+1}{2}}}{e^{X}} \underset{+\infty}{\sim} P_N(0)\,\frac{X^{\frac{3N+1}{2}}}{e^{X}} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0\right)$

Donc $f^{(N+1)}(0)$ existe et vaut 0, et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0

(c) Donc la série de Taylor de f en 0 est :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 . x^n$ son rayon de cv est évidemment $+\infty$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ sa somme est nulle, or $\forall x \neq 0$ $f(x) \neq 0$ alors on a :

$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ or si une fonction est développable en série entière, alors son développement est forcément sa série de Taylor.

Donc f n'est pas développable en série entière en 0.

Ex $\boxed{5}$ (a) $\frac{1}{x-5} = -\frac{1}{5-x} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{5}}\right)$ or on sait que :

$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et que le rayon de cv de cette série est 1, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $\frac{x}{5} \in]-1,1[$ ie $x \in]-5,5[$

$-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{5}}\right) = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{5^n}$. Cette série cv pour $\left|\frac{x}{5}\right|<1$ càd $|x|<5$

et " " " $\left|\frac{x}{5}\right|>1$ " $|x|>5$

donc son rayon de cv est 5

(b) $\frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1+(3x)^2}$. Or on sait que $\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$

et $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$

et que le rayon de cv de ces séries est 1.

Donc $\forall x \in]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[\quad \frac{1}{1+(3x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 3^{2n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-9)^n x^{2n}$ et le rayon de cv

de cette série est $\frac{1}{3}$.

(c) On sait que $\forall x \in]-1,1[$

$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ et que le rayon de cv de la série est 1.

On en déduit que $\forall x \in]-1,1[\quad -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$

et que le rayon de cv de cette série est 1.

Donc $\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1}x^{n-1} \quad (Rcv=1)$

(d) $(\ln(5-x))' = -\frac{1}{5-x} = \frac{1}{x-5}$, or on a vu que $\forall x \in]-5,5[$

$\frac{1}{x-5} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n} \quad (Rcv=5)$ donc $\exists C \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in]-5,5[$

$\ln(5-x) = C - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)5^n} \quad (Rcv=5)$, en faisant ~~xx~~ $x=0$ on trouve $C=\ln 5$

ⓒ La somme des racines de x^2-5x+6 est 5 et leur produit est 6

et donc on a 2 racines évidentes $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

donc $\ln(x^2-5x+6)=\ln((x-2)(x-3))$ qui est défini pour $x\in]-\infty,2[\cup]3,+\infty[$

Donc le + grand intervalle de la forme $]-R,R[$ sur lequel $\ln(x^2-5x+6)$ est défini est $]-2,2[$

Donc le rayon de cv de son développement en série entière ne pourra pas dépasser 2

Sur $]-2,2[$ $\ln((x-2)(x-3))=\ln(2-x)+\ln(3-x)$

$$=\ln(2)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}+\ln(3)-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n}$$

$$=\ln(2)+\ln(3)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(2^{n+1}+3^{n+1})} \quad Rcv=2$$

Ex $\boxed{6}$ ⓐ $\frac{1}{(2+x)^3}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3}$

On sait que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]-1,1[$ $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$ Rcv=1

Donc $\forall x\in]-2,2[$ $\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-3)(-4)\dots(-3-n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}3.4.\dots(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2.n!}2.3.4..(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad Rcv=2$$

ⓑ $\frac{1}{\sqrt[5]{32-x}}=\frac{1}{(32-x)^{1/5}}=(32-x)^{-1/5}=(32)^{-1/5}\left(1-\frac{x}{32}\right)^{-1/5}=\frac{1}{\sqrt[5]{32}}\left(1-\frac{x}{32}\right)^{-1/5}$

donc $\forall x\in]-32,32[$ $\frac{1}{\sqrt[5]{32-x}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{5}-n+1\right)(-1)^n\frac{x^n}{(32)^n.n!}$

Rcv=32

ⓒ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$

$\forall x \in]-1,1[\quad (1+(-x^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{(2n-1)}{2})(-x^2)^n . n!$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot 1.3 \dots (2n-1). x^{2n}$ $Rcv^e = 1$

ⓓ $\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \, 1.3 \dots (2n-1). \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ $Rcv^e = 1$

En faisant $x=0$, on trouve $c = \arcsin(0) = 0$

ⓔ De façon similaire $\forall x \in]-1,1[$

$(1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \, 1.3 \dots (2n-1). x^{2n}$ $\quad (\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$ $Rcv^e = 1$

et puisque $\forall x \in]-1,1[\quad (\operatorname{argsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ on a $\operatorname{argsh}(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \, 1.3 \dots (2n-1). \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

où $c = \operatorname{argsh}(0) = 0$

Ex $\boxed{7}$ En cours cela n'a été fait qu'autour de 0.

On peut le définir en n'importe quel $a \in \mathbb{C}$. On se ramène en 0, en faisant le changement de variable $z_1 = z - a$

Ex : Développer $\ln(x)$ autour de 1 signifie trouver des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ sur un intervalle de la forme $]1-R, 1+R[$

On pose $X = x-1$ on a $x = 1+X$

et on cherche ~~les~~ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\ln(1+X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ pour $X \in]R, R[$

on connaît $\forall X \in]-1,1[\quad \ln(1+X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{n+1}}{n+1}$