TD 8

Séries de Fourier

1. On considère la fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   (a) Faire un dessin rapide de la fonction.
   (b) Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
   (c) Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   (a) Faire un dessin rapide de la fonction.
   (b) Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
   (c) Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
   (d) Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1]$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des cœfficients réels.

4. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

5. Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

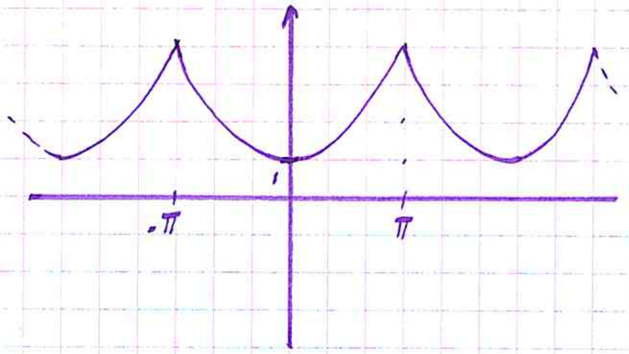
6. Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

7. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^4}$.

TD.8 . Maths II Analyse

Séries de Fourier

Ex. [I] (a)



(b) f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf aux points de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Dans ces points là, elle admet une dérivée à droite et à gauche. Donc elle admet une dérivée à droite et gauche sur $\mathbb{R}$.

Donc sa série de Fourier cv^{ce} sur $\mathbb{R}$ vers f (cf p.48 du cours)

(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n \underset{p.46}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ch(x)\, e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{x(1-in)} + e^{x(-1-in)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{x(1-in)}}{1-in} + \frac{e^{x(-1-in)}}{-1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{\pi}e^{-in\pi}}{1-in} + \frac{e^{-\pi}e^{-in\pi}}{-1-in} - \frac{e^{-\pi}e^{in\pi}}{1-in} - \frac{e^{\pi}e^{in\pi}}{-1-in}\right]$$

$$= \frac{e^{in\pi}}{4\pi}\left[\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1+in}\right]$$ (car $e^{in\pi} = e^{-in\pi}$ (~~...~~ $\cos(n\pi) + i\underbrace{\sin(n\pi)}_{0} = \cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$

$$= \frac{e^{in\pi}}{4\pi}\left[\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})(1+in+1-in)}{1^2-(in)^2}\right]$$

$$= \frac{e^{in\pi}}{\pi}\cdot\frac{sh(\pi)}{1+n^2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Donc en formulation réelle $a_0 \underset{p.46}{=} c_0 = \frac{sh(\pi)}{\pi}$ b_0 n'est pas défini et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \underset{cp45}{=} c_n + c_{-n} = 2\underset{\cos(n\pi)}{\underbrace{(-1)^n}} \dfrac{sh(\pi)}{1+n^2}$ et $b_n \underset{cp46}{=} i(c_n - c_{-n}) = 0$

ce qu'on savait car f est paire

(d) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{sh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^n}{\pi} \dfrac{sh(\pi)}{1+n^2} \cos(nx)$ (pas de terme en sin puisque b_n :

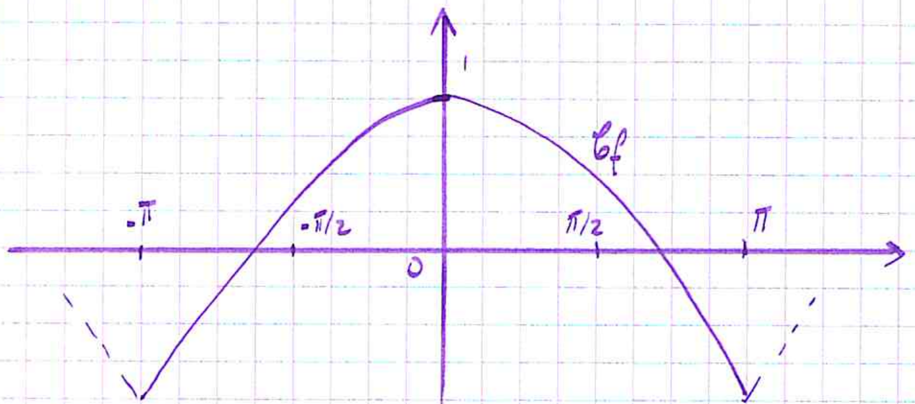
. donc $f(\pi) = \dfrac{sh(\pi)}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\dfrac{(-1)^n(-1)^n}{1+n^2}\right)$

ainsi $2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2} + 1 = \pi \dfrac{ch\pi}{sh\pi} = \dfrac{\pi}{th(\pi)}$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{th(\pi)} - 1\right)$

. et $f(0) = 1 = \dfrac{sh(\pi)}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{sh(\pi)} - 1\right)$

Ex $\boxed{2}$ (a) $\alpha \in]0,1[$ $\quad$ cos est paire, concave sur $[-\pi, \pi]$ $\cos(0) = 1$ $\cos(\pi) = -1$

mais pour $\alpha \in]0,1[$ $\cos(\alpha\pi) > -1$



(b) f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$

(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) e^{-inx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right] . e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{ix(\alpha-n)} + e^{ix(-\alpha-n)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ix(\alpha-n)}}{i(\alpha-n)} + \frac{e^{ix(-\alpha-n)}}{i(-\alpha-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{in\pi}}{4\pi}\left[\frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{i(\alpha-n)} + \frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{i(\alpha+n)}\right]$$

$$= \frac{e^{in\pi}}{2\pi}\left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n}\right] = \frac{e^{in\pi}}{\pi}\left[\frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}\right]$$

donc en formulation réelle

$a_0 = c_0 = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}$ b_0 n'est pas définie et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = c_n + c_{-n} = 2c_n = \dfrac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$

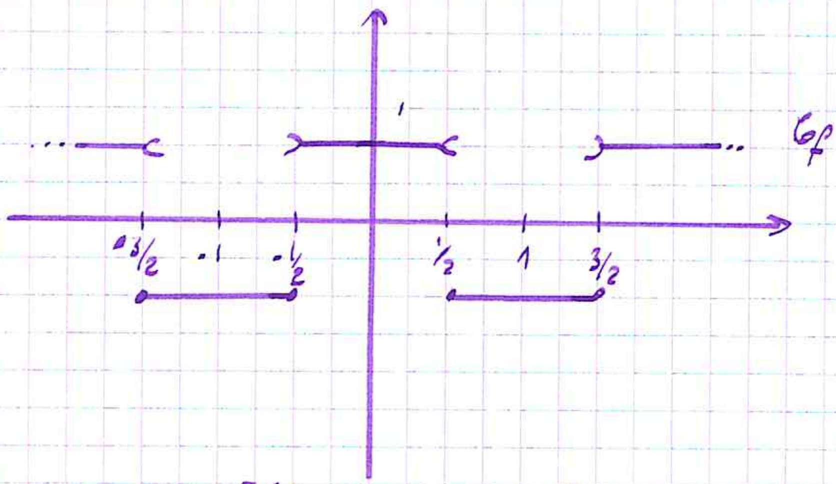
$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$ ce qu'on savait puisque f est paire

(d) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a donc $f(x) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(\alpha^2 - n^2)} \cos(nx)$

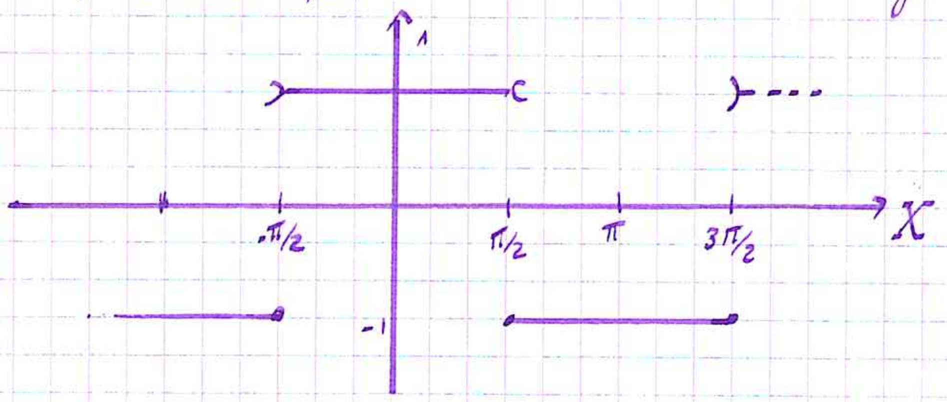
et pour $x = 0$

$f(0) = 1 = \dfrac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\dfrac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \right]$

Ex $\boxed{3}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, 1/2[\\ -1 \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



f n'est pas de période 2π mais de période 2. On se ramène alors à une fonction de période 2π en posant $X = \pi x$ et en étudiant $g(X) = f(x) = f\left(\frac{X}{\pi}\right)$



g est C^0 sur $[-\pi,\pi]$ sauf en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de $[-\pi,\pi]$. Donc la série de Fourier cv en tout point de $[-\pi,\pi]$ vers $g(X)$ si $X \neq -\frac{\pi}{2}$ et $X \neq \frac{\pi}{2}$

vers $\frac{1}{2}\left(g\left(-\frac{\pi}{2}^-\right) + g\left(-\frac{\pi}{2}^+\right)\right) = 0$ en $-\frac{\pi}{2}$

et vers $\frac{1}{2}\left(g\left(\frac{\pi}{2}^-\right) + g\left(\frac{\pi}{2}^+\right)\right) = 0$ en $\frac{\pi}{2}$

Calculons ses coef. de Fourier (cf. p.47 cours)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = 0$ car g est paire

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1.dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\left[2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{4}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Alors pour $p \in \mathbb{N}^*$ $a_{2p} = 0$ et $a_{2p-1} = \frac{4}{(2p-1)\pi}(-1)^{p+1}$

Donc $\forall X \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $g(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nX)$

et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}\}$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$

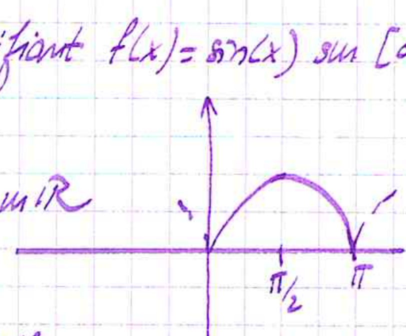
ce qui est de la forme demandée avec $\omega = \pi$

Ex $\boxed{4}$ $\boxed{\text{oui}}$!!

On considère la fonction f 2π-périodique, paire et vérifiant $f(x) = \sin(x)$ sur $[0,\pi]$

elle est C^0 sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$



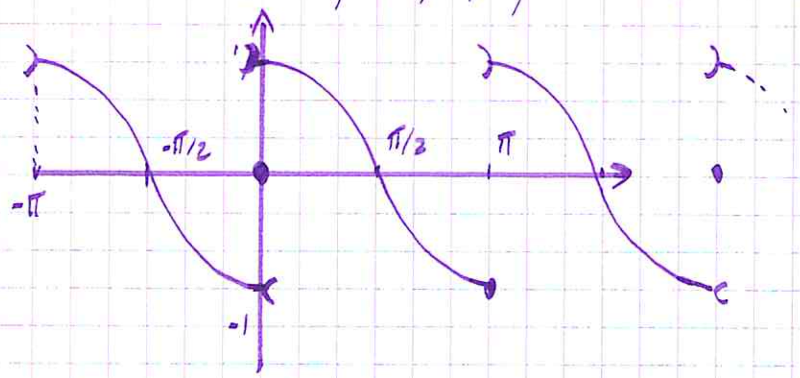
donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ = somme de sa série de Fourier

or, puisque f est paire, sa série de Fourier est de la forme

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ (les b_n sont nuls), donc $\forall x \in [0,\pi]$ $f(x) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$

Ex $\boxed{5}$ $\boxed{\text{Oui}}$!!!

On considère f 2π-périodique, impaire et t.q. $f(x) = \cos x$ pour $x \in]0,\pi]$



⚠ on a $f(0) = 0$ car f est impaire. f est C^0 sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et admet partout sur $\mathbb{R}$ une dérivée à droite et à gauche donc

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ $f(x)$ = somme de sa série de Fourier.

Pour $x \in \{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ sa série de Fourier c^{ν} vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = 0$

or pour $p \in \mathbb{Z}$ $f(2p\pi) = 0$ et $f((2\pi+1)\pi) = -1$. Donc pour $x \in \{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

la série de Fourier de f ne c^{ν} vers $f(x)$ que si k est pair

or la série de Fourier de f est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$ donc $\forall x \in]0,\pi]$

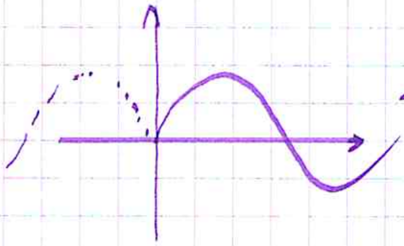
$f(x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$

Ex $\boxed{6}$ $\boxed{\text{NON}}$

Car $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \mapsto \cos(nx)$ est paire donc $\sum a_n \cos(nx)$ si elle c^{ν} est paire

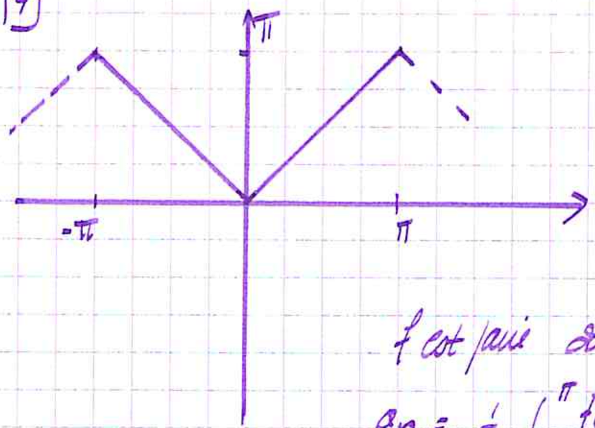
or la seule fonction 2π-périodique qui coïncide avec sin sur $[0,2\pi]$ est bien sûr sinus elle même qui est impaire et non nulle.

Une fonction impaire et non nulle ne peut être égale à une fonction paire.



si on faisait ça, f ne serait plus 2π périodique, mais 4π-périodique c'est pour ça que ça ne marche pas !!

Ex 7



f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ = somme de sa série de Fourier

Calculons-la en formulation réelle

f est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$ $\quad$ $\int^{ation}$ par parties : $u(x)=x$ $u'(x)=1$, $v'(x)=\cos(nx)$, $v(x) = \frac{\sin nx}{n}$

d'où $$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $a_{2p} = 0$ et $a_{2p-1} = -\frac{4}{\pi(2p-1)^2}$

et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos((2p-1)x)}{(2p-1)^2}$$

En faisant $x=0$ $\quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$

donc $$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Grâce à l'égalité de Parseval $\|f\|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$

or $$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

et $$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2p-1)^2}\right)^2$$

donc $$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

donc $$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}$$

⚠ On peut séparer car $\forall P \in \mathbb{N}^* \ \sum_{n=1}^{2P} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{(2p-1)^2}$

et chaque terme cv !!

Si on note $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ on a $S = \frac{1}{4} S + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2}$

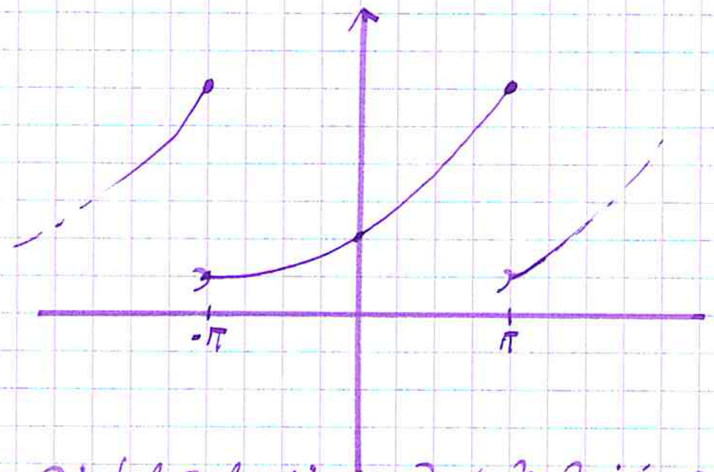
donc $S\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ donc $S = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$

De même si on note $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

$S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^4}$ càd $S_2 = \frac{1}{16} S_2 + \frac{\pi^4}{96}$.

donc $S_2 = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{16}{15} = \frac{\pi^4}{6 \cdot 15} = \frac{\pi^4}{90}$

Ex $\boxed{8}$



f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et admet des dérivées à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$.
Donc sa série de Fourier cv simplement sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ elle cv vers $f(x)$ et pour $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
elle cv vers $\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = ch(\pi)$

Calculons les coefs de Fourier sous forme complexe (la forme exponentielle de f s'y prête bien)

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-inx}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left[e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right]$$

$$= \frac{e^{in\pi}}{(1-in)\pi}\left[\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right] = \frac{e^{in\pi}}{1-in}\,\frac{sh(\pi)}{\pi} = \frac{e^{in\pi}(1+in)}{1+n^2}\cdot\frac{sh(\pi)}{\pi}$$

Si on revient à la forme réelle

$a_0 = c_0 = \frac{sh(\pi)}{\pi}$ $\qquad b_0 = 0$ par ex. et $\forall n \geq 1$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{sh(\pi)}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+n^2}\,(1+in+1-in) = \frac{2sh(\pi)}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = c_n - c_{-n} = \frac{sh(\pi)}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+n^2}\,i\,(1+in-1+in) = -\frac{2sh(\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cdot n$$

Et la série de Fourier de f est :

$$\frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left(\cos(nx) - n\sin(nx)\right)$$

Elle cv vers $ch(\pi)$ pour $x=\pi$ (point de discontinuité)

Pour $x=\pi$ on a :

$$ch(\pi) = \frac{sh(\pi)}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\right) \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{th(\pi)} - 1\right)$$