NOM :
PRENOM :

Licence Sciences pour la Santé
Mathématiques - L3
Printemps 2025

Test -(30 min - 3 février 2025)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents autorisé : une feuille manuscrite- calculatrice, téléphone non autorisés.

Exercice Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_1' = 10x_1 - 5x_2, \\ x_2' = 8x_1 - 12x_2 \end{cases}$$

To

1 1. Écrire le système sous la forme vectorielle $X' = AX$ où X et A seront à préciser.
2 2. Calculer les valeurs propres de A.
1 3. En déduire le type d'équilibre que vous obtenez.
2 4. Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
1 5. Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère (y_1, y_2). Expliquer ce qu'est ce plan.
2 6. Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère (x_1, x_2) à partir de la question précédente. Expliquer la méthode pour obtenir cette représentation à partir de la question précédente.
1 7. Donner l'expression et tracer la solution passant par $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

Réponse :

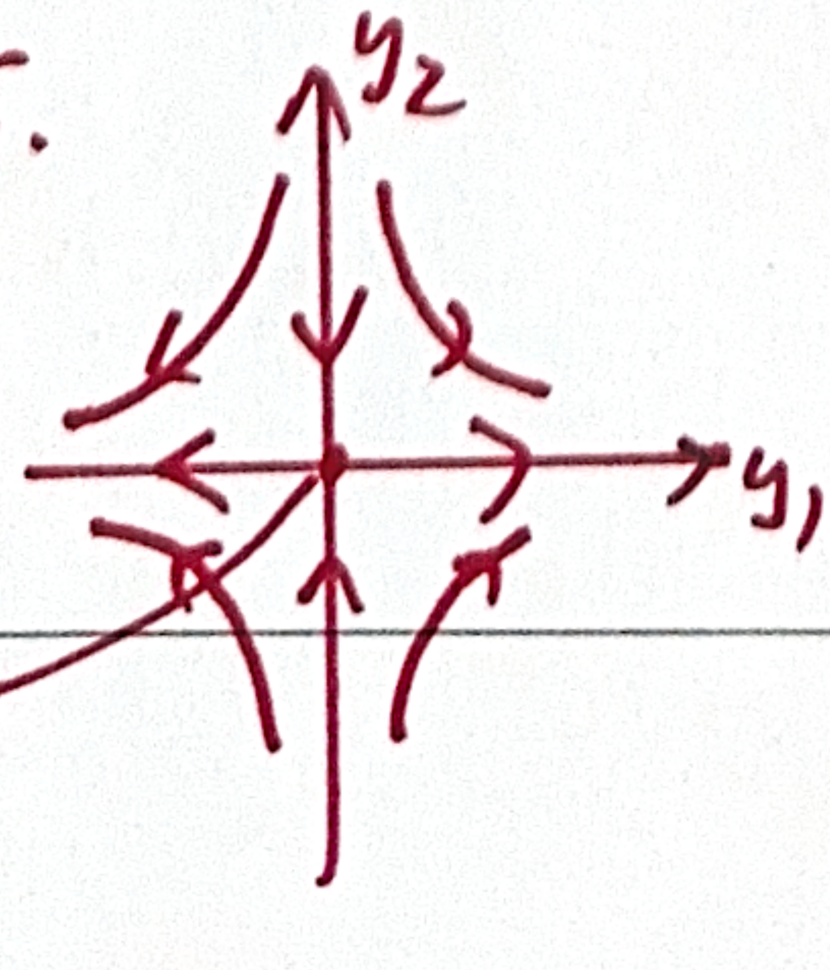
1. Le système s'écrit sous la forme $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$.

2. Les valeurs propres sont solutions de l'équation $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = 0$ où $tr(A) = \boxed{-2}$ et $\det(A) = \boxed{-80}$.
Le discriminant $\Delta = 4 - 4(-80) = 4 + 4.80 = 4(80+1) = 4.81 = 2^2.9^2 = \boxed{18^2 > 0}$ 18^2
Il y a 2 valeurs propres réelles distinctes : $\boxed{\lambda_1 = 8}$ et $\boxed{\lambda_2 = -10}$

3. D'après le point 2, l'équilibre $(0,0)$ est un point selle.

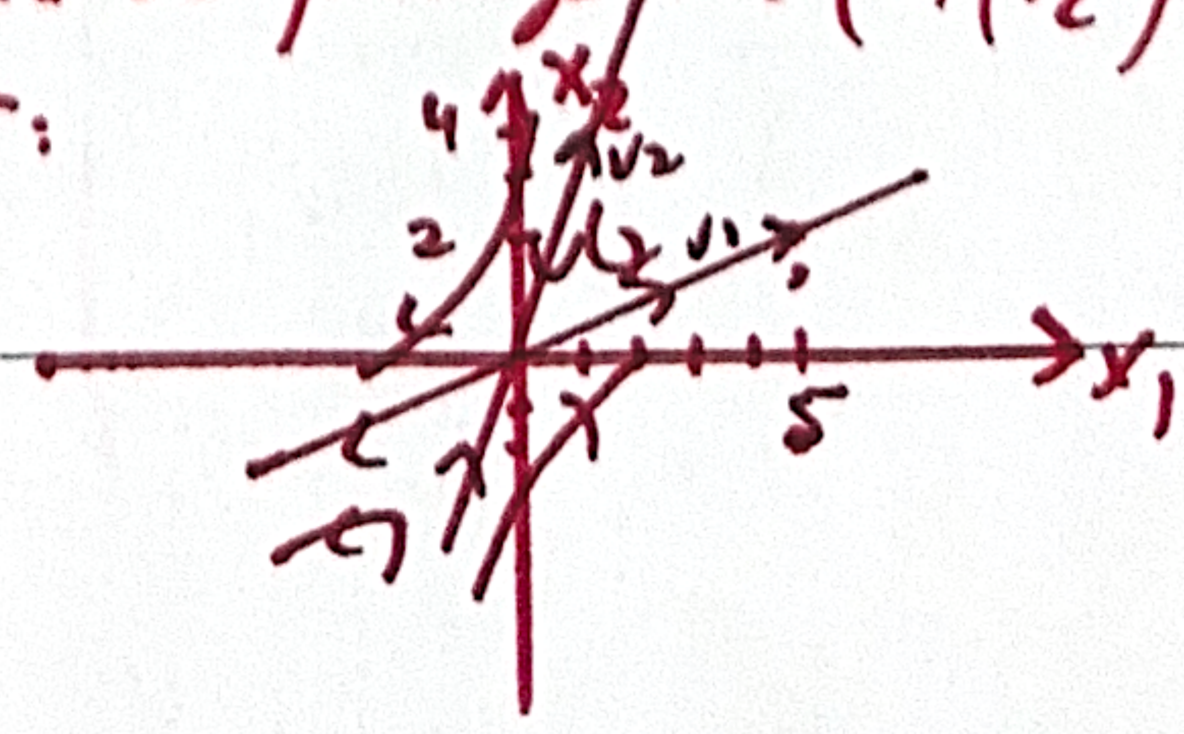
4. Les vecteurs propres V_1 et $V_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ vérifient $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$
en résolvant les calculs, on trouve $V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

5.



point selle

6. Par changement de base en utilisant la matrice de passage $P = (V_1 | V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
on obtient :



Réponse :

7. Les solutions sont données par

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}$$

si $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} 1 = 5c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - 5c_1 \\ 2 = 2c_1 + 4c_2 \end{cases}$

$$2 = 2c_1 + 4 - 20c_1$$

$$0 = -18c_1 + 2$$

donc $c_1 = \frac{2}{18} = \boxed{\frac{1}{9}}$

et $c_2 = 1 - 5 \cdot c_1 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$

donc

$$\boxed{X(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}}$$