NOM :
PRÉNOM :
PRÉNOM :
NUMÉRO ETUDIANT :

Double Licence Maths-Sciences de la Vie
Analyse, Algèbre, Algorithmique
Pour Les Sciences De La Vie 3
Automne 2025

Corrigé

Test 1 (30 min - 3 décembre 2025)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Document autorisé : une feuille manuscrite, format A4. Calculatrice, téléphone et objets connectés non autorisés.

Exercice 1 (4 points)

On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = (6-3x)^2(1-x)^3x$.

1. (1 point) Déterminer les équilibres de cette équation.
2. (1 point) Dessiner le portrait de phase.
3. (2 points) Déterminer s'il s'agit d'équilibres stables, instables ou shunt (positifs ou négatifs), puis dessiner quelques trajectoires représentatives des différents cas.

Réponse :

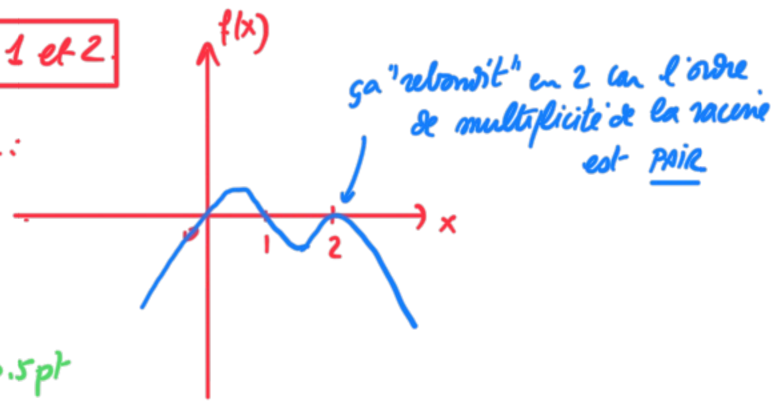
1. Les équilibres x^* vérifient $x^{*'}=0$ c'est à dire $f(x^*)=0$

or $f(x^*)=0 \iff (6-3x^*)^2(1-x^*)^3x^*=0$

$\iff x^*=2$ ou $x^*=1$ ou $x^*=0$

1 pt Il y a donc 3 équilibres : $\boxed{0, 1 \text{ et } 2}$

2. Comme $f(x) \underset{\infty}{\sim} -x^6$ on a :



0.5pt

donc le portrait de phase donne

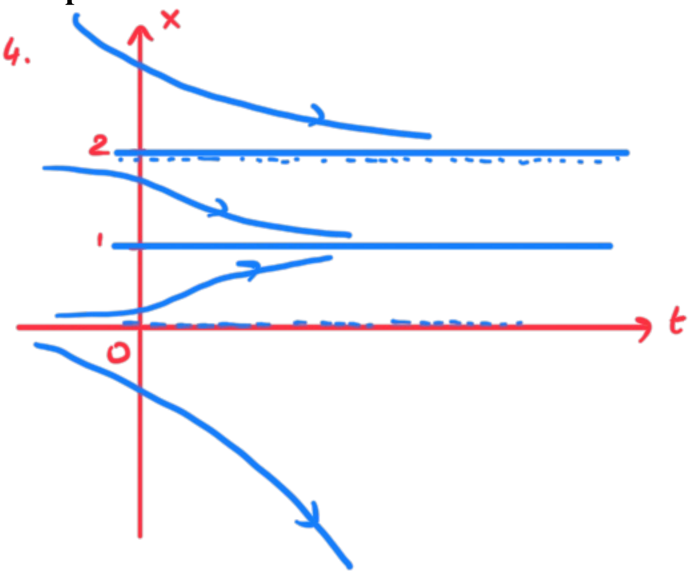
3.)

autre méthode : tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de $(6-3x)^2$		+		+		+	0	+	
— $(1-x)^3$		+		+	0	−		−	
— x		−	0	+		+		+	
signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	0	−	

Réponse :

4.



1pt

Exercice 2 (6 points)
On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec $f(x) = x(r - e^x)$, avec $r \in \mathbb{R}$.

1. (1 point) Déterminer les équilibres de cette équation en fonction des valeurs de r.
2. (2 point) Dessiner le portrait de phase en fonction des valeurs de r
3. (2 point) Représenter le diagramme de bifurcation. Reconnaître le type de bifurcation. Expliquer.
4. (1 point) Dessiner quelques trajectoires représentatives des différents cas en fonction des valeurs de r.

Réponse :

1. Les equilibres x^* sont donnés par $f(x^*)=0$

or $f(x^*)=0 \iff x^*(r-e^{x^*})=0$

$\iff \begin{cases} x^*=0 \text{ (existe quel que soit } r\text{)} \\ \text{ou} \\ r=e^{x^*} \end{cases}$: → si $r\le 0$ PAS D'AUTRE EQUILIBRE

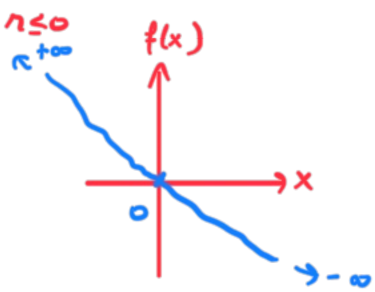
→ si $r>0$ $x^*=\ln(r)$ (et $x^*=0$ (confondu si $r=1$))

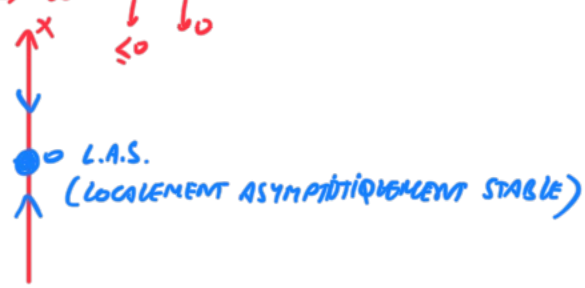
1 pt

2. <u>On sait que</u> : si $\boxed{r\le 0}$: il y a un seul equilibre

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(r-e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^x = -\infty$ (idem d'ailleurs si $r>0$)

et $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\underbrace{r}_{\le 0}-\underbrace{e^{-x}}_{0}) = +\infty$

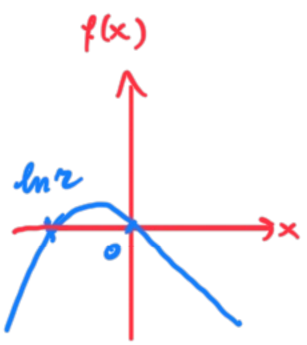




2 pts

$\boxed{\text{si } 0<r<1}$ $\ln r<0$ et $x^*=\ln r<0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(r-e^x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\underbrace{r}_{>0}-\underbrace{e^{x}}_{0}) = -\infty$

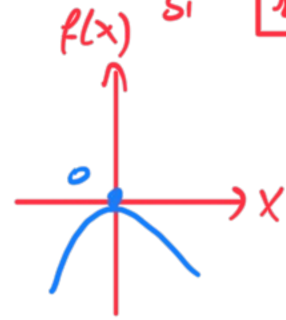


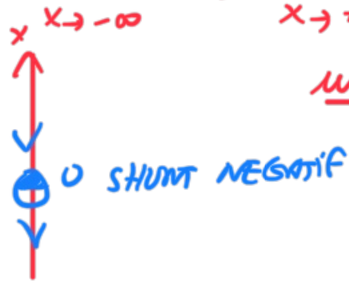
Réponse :

si $\boxed{r=1}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (car $r>0$)

un seul équilibre (double)

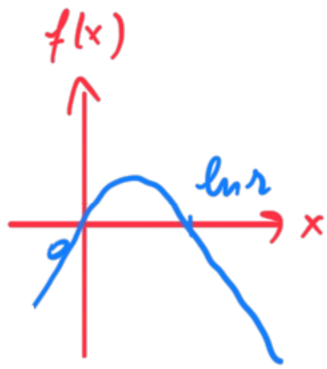
$x^* = 0$

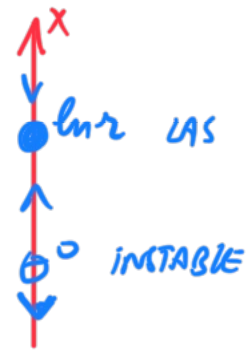




si $\boxed{r>1}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (car $r>0$)

et $x^* = \ln r > 0$





3. Diagramme de bifurcation $x^* = 0$ ou $x^* = \ln r$