

NOM :
PRENOM :

Licence Sciences & Technologies
Mineure mathématiques - PASS
Printemps 2026

Test 1 - 30 min - 15 janvier 2026

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Question de cours (5 points)

- (2 points) Donner les définitions d'une fonction et d'une application.
- (3 points) (a) Expliquer (en donnant leur définition) la différence entre l'image réciproque d'un ensemble B par une application f et l'application réciproque f^{-1} d'une application f .
(b) Ces deux concepts existent-ils toujours ?
(c) Illustrer ces deux concepts par une représentation graphique.

Réponse :

① 1. Fonction : Soient $I, J \subset \mathbb{R}$. La fonction f définie par un ensemble de départ I et par un ensemble d'arrivée J est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I appelé antécédent possède au plus un élément dans J appelé image.

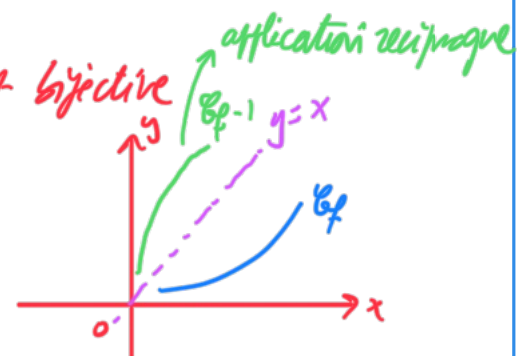
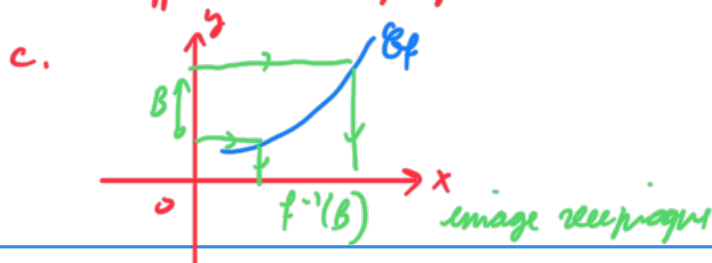
① Application : Soient $I, J \subset \mathbb{R}$. L'application f définie par un ensemble de départ I et par un ensemble d'arrivée J est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I possède exactement une image dans J .

② a. Image réciproque : Soient $f: I \rightarrow J$ avec $I, J \subset \mathbb{R}$. Pour toute partie B de J , l'image réciproque de B par f est l'ensemble $\{x \in I; f(x) \in B\}$ elle est notée $f^{-1}(B)$.

② Application réciproque
Soit $f: I \rightarrow J$ une application bijective. Alors il existe une unique application $f^{-1}: J \rightarrow I$ t.q. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$, et f^{-1} est appelée application réciproque.

① b. L'image réciproque existe toujours

L'application réciproque n'existe que si f est bijective



Exercice - (5 points) Soit $f : I \rightarrow J$ une application, où $I, J \subset \mathbb{R}$.

On suppose $I = J = \mathbb{R}$ et f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$.

1. Est-ce que f est une application ? Sinon, comment choisir I pour qu'elle le soit ? On notera I_1 cet intervalle.
2. Chercher $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$?
3. Que peut-on en déduire sur la surjectivité de $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$?
4. Chercher $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 5$?
5. Que peut-on dire sur son injectivité de $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$? (1 point) ?
6. Bonus : quels intervalles I et J pourrait-on choisir pour que f soit bijective (+1 point) ?

Réponse :

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$ or $I = \mathbb{R}$ donc f n'est pas une application.

① Pour que f soit une application il faut que $I \subset \mathbb{R}^*$. Notons $I_1 = \mathbb{R}^*$

① 2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow 1+x^2 = x^2 \Leftrightarrow 1=0$ impossible.

① 3. D'après 2), 1 n'a pas d'antécédent, donc f est non surjective sur I_1 .

① 4. $f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{x^2} = 5 \Leftrightarrow 1+x^2 = 5x^2 \Leftrightarrow 1-4x^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (1-2x)(1+2x) = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

① 5. D'après 4) 5 possède 2 antécédents donc f est non surjective sur I_1 .

① 6. Cherchons I et J t.q. $\forall x \in I$, il existe un unique y t.q. $f(x) = y$

$$\text{Or } f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{x^2} = y \Leftrightarrow 1+x^2 = yx^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = (y-1)x^2$$

Si $y \neq 1$ alors $\frac{1}{y-1} = x^2$ n'existe que si $y > 1$

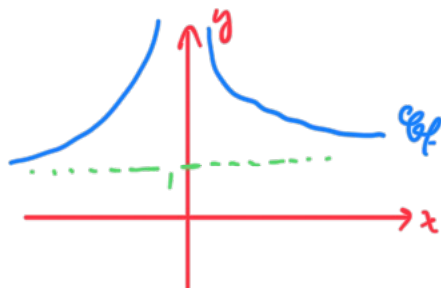
si $y > 1$ alors $x = \sqrt{\frac{1}{y-1}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{y-1}}$

Pour que f soit bijective il faut que $x > 0$ et $y > 1$ ($I = \mathbb{R}_+^*$, $J =]1, +\infty[$)

cad $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]1, +\infty[$

ou bien $f : \mathbb{R}_-^* \rightarrow]1, +\infty[$

($I : \mathbb{R}_-^*$, $J :]1, +\infty[$)



NOM :
PRENOM :

Licence Sciences & Technologies
Mineure mathématiques - PASS
Printemps 2026

Test 2 (30 min - 22 janvier 2026)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Exercice 1- (5 points)

- Donner la définition d'une application paire et d'une application impaire et donner des exemples sur un graphe séparé.
- On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos(x)/x$.
 - Étudier la parité de f .
 - Calculer la dérivée de f .

Réponse :

1. f paire : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I symétrique par rapport à 0 est paire
si pour tout $x \in I$ $f(-x) = f(x)$ (0.5)

f impaire : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I symétrique par rapport à 0 est impaire
si pour tout $x \in I$ $f(-x) = -f(x)$ (0.5)



($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 $x \mapsto x^2$ (0.5)



($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 $x \mapsto x^3$ (0.5)

2. a. $x \in \mathbb{R}^*$: $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 (0.5)

$$\text{soit } x \in \mathbb{R}^* \quad f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x} = -f(x)$$

f est donc impaire (0.5)

b. soit $x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$

(1)

$$= -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$$

forme:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = \cos x \quad u' = -\sin x$$

$$v = x \quad v' = 1$$

Exercice 2 - (5 points) Soit f l'application définie par $f(x) = \frac{4 - 5 \cosh(x)}{\sinh(x)}$.

- ① 1. Préciser son domaine de définition I et montrer que f est impaire.
- ② 2. Donner l'expression de la dérivée f sur I .
- ② 3. Étudier les variations de f .
- +1 4. BONUS : tracer le graphe de f .

Réponse :

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R}, \sinh(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

pour le reste, voir T.D Fonctions usuelles # 4.15

NOM :
PRENOM :

Licence Sciences & Technologies
Mineure mathématiques - PASS
Printemps 2026

Test 3 (30 min - 28 janvier 2026)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Exercice 1- (5 points)

1. Énoncer la définition de la limite finie d'une application en un point, l'illustrer par une figure.
2. Énoncer la définition de la continuité d'une application en un point, l'illustrer par une figure.
3. Quelles sont les différences entre les deux définitions précédentes ?

Réponse :

1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$). Soient a et $l \in \mathbb{R}$ avec a adhérent à I (0.5)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $\forall x \in I$ si $|x - a| \leq \eta$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ (1)

(figure voir cours) (0.5)

2. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I non vide, non réduit à un point, $I \subset \mathbb{R}$

(0.5) | Soit $a \in I$

f continue en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $\forall x \in I$ si $|x - a| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ (1)

(figure voir cours) (0.5)

3. limite finie en 1 point: a adhérent à I
 l ps nécessairement égal à $f(a)$

(0.5)

continuité $a \in I$

$l = f(a)$ obligatoirement

(0.5)

Exercice 2 - (5 points) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $I = [-3, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$.

1. Montrer que f est croissante sur I en étudiant ses variations.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 6$.
3. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l que l'on déterminera. Représenter cette suite.

Réponse :

1. $f: x \mapsto 2\sqrt{x+3}$, $x \in I$

① $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$, $x \in]-3, +\infty[$ $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-3, +\infty[$ donc f est $\nearrow$ sur $]-3, +\infty[$

2. De plus, $u_0 = -1$ et $u_1 = 2\sqrt{-1+3} = 2\sqrt{2} > 0$ et donc $u_1 > u_0$

Comme f croissante et $u_1 > u_0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ (il faudrait aussi montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$: par récurrence (assez facile))

①

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq u_n \leq 6$?

on voit question (2)

Par récurrence : $u_0 = -1$ alors $-1 \leq u_0 \leq 6$.

• supposons $-1 \leq u_k \leq 6$ alors $2 \leq u_k + 3 \leq 9$

et $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 3} \leq 3$

ainsi $-1 \leq 2\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq 6$

• Conclusion : $u_n \in [-1, 6]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

①

③.5 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ et majorée par 6 donc convergente

La limite l vérifie $l = 2\sqrt{l+3}$ avec $l \in [-1, 6]$

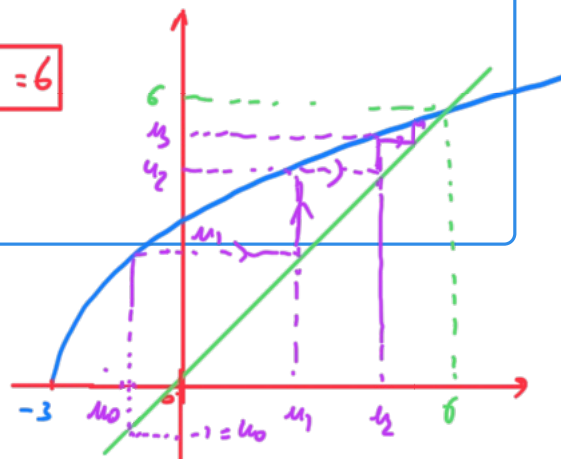
on $l = 2\sqrt{l+3} \Leftrightarrow l^2 = 4(l+3)$

$\Leftrightarrow l^2 - 4l - 12 = 0$ $\Delta = 16 + 4 \cdot 12 = 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 3 = 16(1+3) = 16 \cdot 4 = (4 \cdot 2)^2 = 8^2$

$l_1 = \frac{4-8}{2} = -2 < -1$

$l_2 = \frac{4+8}{2} = 6 \leq 6$ donc $l = 6$

①



NOM :
PRENOM :

Parcours d'Accès Spécifique Santé
Mineure mathématiques
Printemps 2026

Test 4 (30 min - 12 février 2026)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Question de cours- (5 points)

1. (2 point) Enoncer le théorème de Rolle.
2. (3 points) Enoncer l'équivalence logique de la contraposée et la démontrer de deux façons différentes.

Réponse :

1. Théorème de Rolle

hypothèses . soient $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$

①

. soient f définie, continue sur $[a, b]$

. f dérivable sur $]a, b[$

②

. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ t.q. $f'(c) = 0$

2. Contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \quad ①$$

Méthode 1

①

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non Q	non P	non Q $\Rightarrow$ non P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Méthode 2

$$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P \equiv \text{non}(\text{non } Q) \text{ ou } \text{non } P$$

$$\equiv Q \text{ ou } \text{non } P$$

$$\equiv \text{non } P \text{ ou } Q$$

$$\equiv P \Rightarrow Q$$

②

Exercice 2 - (5 points) Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
- Rappeler le théorème des accroissements finis.
- Fixons $x > 0$.
 - Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{c}$.
 - En déduire que $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.
- Bonus : en déduire la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x}$.

Réponse :

1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

comme composée d'applications définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$

①

① $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-1/x^2}{1/x} = -\frac{x}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$

2. T.A.F. Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

f définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

①

alors $\exists c \in]a, b[$ t.q. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

3. a. Ici f continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ a fortiori sur $]x, x+1[$ $\forall x > 0$

donc d'après le T.A.F. $\exists c \in]x, x+1[$ t.q. $f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$ (*)

0.5

(*) $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1/x+1}{1/x}\right) = -\frac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{c} \Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{c}}$

0.5

b. Comme $0 < x < c < x+1$ alors $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{c} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

donc $0 < \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

①

4. Bonus : $\forall x > 0$

$\frac{x}{x+1} < x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < 1$

par le théorème des gendarmes

$\downarrow x \rightarrow +\infty$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1}$

①