

## Des algues envahisseuses

Une piscine est infestée par des algues dont la densité est appelée  $N(t)$ . Le propriétaire tente alors d'enrayer l'infestation avec un produit chimique anti-algues, déversé dans la piscine avec un débit constant  $Q$ . En l'absence d'algues, le produit chimique disparaît naturellement ; quand les algues sont présentes, elles métabolisent le produit, qui les tue.

Les équations qui régissent l'évolution dans le temps de la densité d'algues  $N(t)$  et de produit chimique  $C(t)$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)C(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = Q - \alpha C(t) - \beta N(t)C(t) \end{cases}$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $Q$  sont des paramètres tous strictement positifs.

### Interprétation biologique

**Question 1** Quel est le modèle sous-jacent à la croissance des algues ?  0   $\frac{1}{2}$   1

**Question 2** Donnez une interprétation aux paramètres  $a$ ,  $\alpha$  et  $Q$ .  0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$

**Question 3** Donnez une interprétation aux paramètres  $b$  et  $\beta$ .  0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$

CORRECTION

**Question 4** De quel type d'interaction s'agit-il?

0   $\frac{1}{2}$   1

**Points d'équilibre et stabilité**

On suppose dans la suite que  $Q > \frac{aa}{b}$ .

**Question 5** Montrez qu'il existe deux points d'équilibre  $(0, C_1^*)$  et  $(N_2^*, C_2^*)$ .  
Précisez les valeurs de  $C_1^*$ ,  $N_2^*$  et  $C_2^*$ .

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2

CORRECTION

**Question 6** Calculez la matrice Jacobienne du système.

0   $\frac{1}{2}$   1

**Question 7** Donnez l'expression de la matrice Jacobienne au point d'équilibre  $(0, C_1^*)$ .

0   $\frac{1}{2}$   1

**Question 8** Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre  $(0, C_1^*)$ . Justifiez.

0   $\frac{1}{2}$   1

**Question 9** Montrez que la matrice jacobienne au point d'équilibre  $(N_2^*, C_2^*)$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -bN_2^* \\ -\beta C_2^* & -\frac{Qb}{a} \end{pmatrix}$$

## CORRECTION

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$

**Question 10** Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre  $(N_2^*, C_2^*)$ .  
Justifiez.

0   $\frac{1}{2}$   1

## Portrait de phase et trajectoires

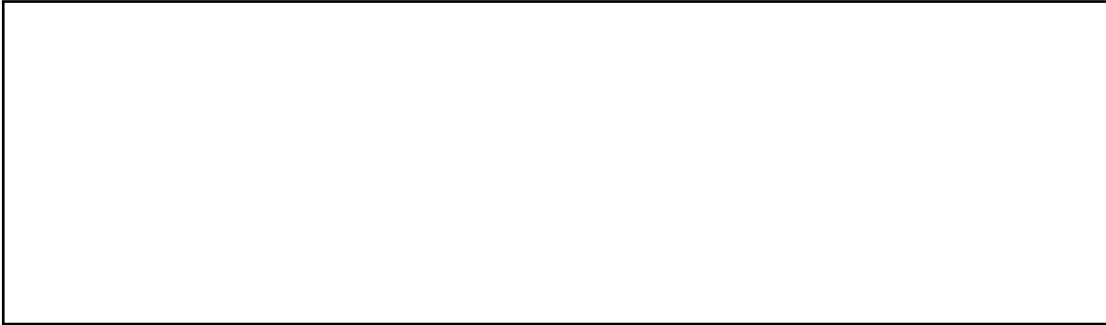
**Question 11** On choisit le plan de phase  $(N, C)$ . Donnez l'équation de l'isocline horizontale. Justifiez.

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$

CORRECTION

**Question 12** Donnez l'équation des isoclines verticales. Justifiez.

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$



**Question 13** Sur le portrait de phase ci-dessous :

- Colorez de deux couleurs différentes les isoclines horizontales et verticales ;
- Positionnez les points d'équilibre ;
- Positionnez les vecteurs vitesse horizontaux et verticaux et indiquez leur sens ;
- Dessinez quelques trajectoires bien choisies.

*N'oubliez pas d'indiquer la légende.*

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$   2   $\frac{5}{2}$   3



## CORRECTION

**Question 14** Les propositions suivantes sont-elles vérifiées ? Justifiez.

(a) Quelle que soit la condition initiale en produit chimique, les algues disparaissent.

(b) Si  $C(0) > \frac{a}{b}$  et si  $N(0) < \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$ , la population d'algues s'éteint mais les résidus de produit chimique restent présents dans la piscine.

0   $\frac{1}{2}$   1   $\frac{3}{2}$

