

Des algues envahisseuses

Une piscine est infestée par des algues dont la densité est appelée $N(t)$. Le propriétaire tente alors d'enrayer l'infestation avec un produit chimique anti-algues, déversé dans la piscine avec un débit constant Q . En l'absence d'algues, le produit chimique disparaît naturellement ; quand les algues sont présentes, elles métabolisent le produit, qui les tue.

Les équations qui régissent l'évolution dans le temps de la densité d'algues $N(t)$ et de produit chimique $C(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)C(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = Q - \alpha C(t) - \beta N(t)C(t) \end{cases}$$

où a , b , α , β et Q sont des paramètres tous strictement positifs.

Interprétation biologique

Question 1 Quel est le modèle sous-jacent à la croissance des algues ? 0 $\frac{1}{2}$ 1

Question 2 Donnez une interprétation aux paramètres a , α et Q . 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

Question 3 Donnez une interprétation aux paramètres b et β . 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

CORRECTION

Question 4 De quel type d'interaction s'agit-il?

0 $\frac{1}{2}$ 1

Points d'équilibre et stabilité

On suppose dans la suite que $Q > \frac{aa}{b}$.

Question 5 Montrez qu'il existe deux points d'équilibre $(0, C_1^*)$ et (N_2^*, C_2^*) .
Précisez les valeurs de C_1^* , N_2^* et C_2^* .

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2

CORRECTION

Question 6 Calculez la matrice Jacobienne du système.

0 $\frac{1}{2}$ 1

Question 7 Donnez l'expression de la matrice Jacobienne au point d'équilibre $(0, C_1^*)$.

0 $\frac{1}{2}$ 1

Question 8 Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre $(0, C_1^*)$. Justifiez.

0 $\frac{1}{2}$ 1

Question 9 Montrez que la matrice jacobienne au point d'équilibre (N_2^*, C_2^*) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -bN_2^* \\ -\beta C_2^* & -\frac{Qb}{a} \end{pmatrix}$$

CORRECTION

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

Question 10 Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre (N_2^*, C_2^*) .
Justifiez.

0 $\frac{1}{2}$ 1

Portrait de phase et trajectoires

Question 11 On choisit le plan de phase (N, C) . Donnez l'équation de l'isocline horizontale. Justifiez.

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

CORRECTION

Question 12 Donnez l'équation des isoclines verticales. Justifiez.

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

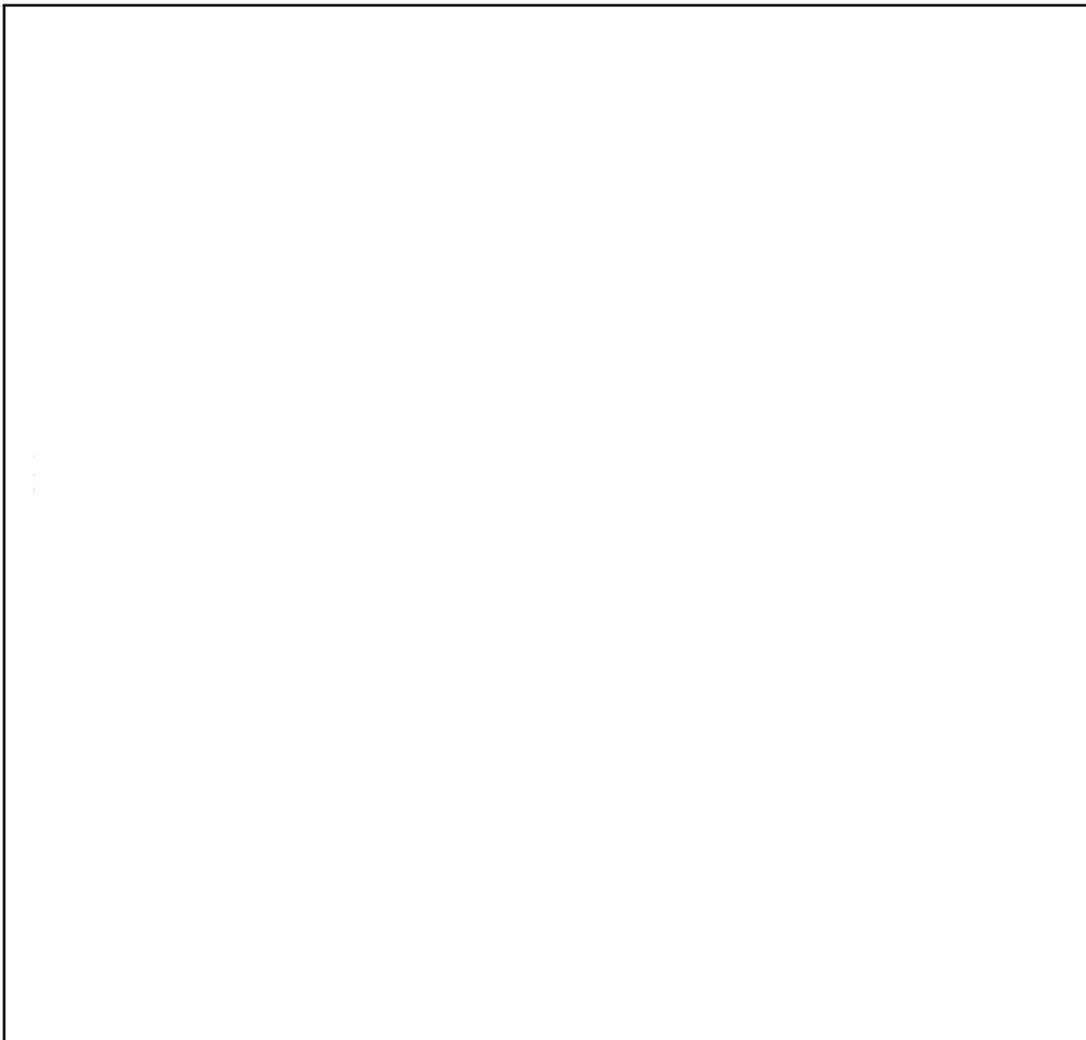


Question 13 Sur le portrait de phase ci-dessous :

- Colorez de deux couleurs différentes les isoclines horizontales et verticales ;
- Positionnez les points d'équilibre ;
- Positionnez les vecteurs vitesse horizontaux et verticaux et indiquez leur sens ;
- Dessinez quelques trajectoires bien choisies.

N'oubliez pas d'indiquer la légende.

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3



CORRECTION

Question 14 Les propositions suivantes sont-elles vérifiées? Justifiez.

(a) Quelle que soit la condition initiale en produit chimique, les algues disparaissent.

(b) Si $C(0) > \frac{a}{b}$ et si $N(0) < \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$, la population d'algues s'éteint mais les résidus de produit chimique restent présents dans la piscine.

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$

