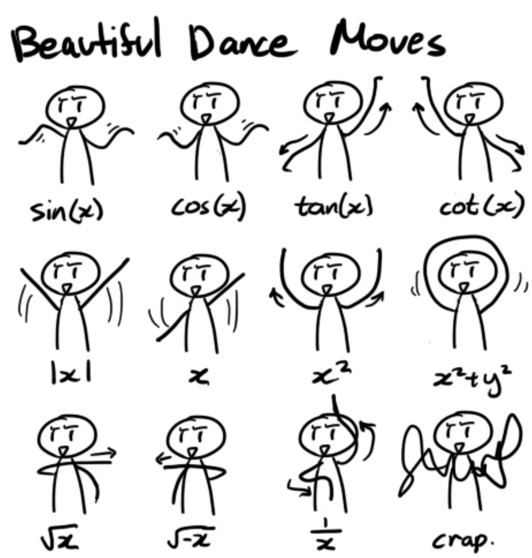
Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Analyse 1



Université Claude Bernard Lyon 1

Préambule

L’objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse mathématique de la licence. Etant donné que le recrutement en première année d’analyse est assez hétérogène, il semble assez judicieux de commencer par rappeler les notions élémentaires qui serviront tout au long de ce cours, histoire de ne perdre personne en route.
Quand il sera nécessaire au début de chaque chapitre, nous rappellerons ce qui est censé être connu en terminal. Nous essaierons également dans la mesure du possible de fournir l’essentiel des résultats de chaque chapitre sur une page, histoire de synthétiser les connaissances à bien maîtriser pour passer au chapitre suivant.
Nous fournirons autant d’exemples et de figures nécessaires afin d’obtenir une meilleure compréhension du cours. Nous essaierons également de souligner les pièges dans lesquels chacun peut se fourvoyer soit par inattention, soit par une mauvaise maîtrise du cours.

Table des matières

1 Les réels **7**

1.1 Un peu d'histoire . . . 7
1.2 Introduction aux nombres réels . . . 9
1.2.1 Quelques règles de calcul . . . 10
1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 12
1.4 Voisinage . . . 15
1.5 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum . . . 16
1.6 Valeur absolue . . . 18
1.7 Partie entière . . . 19

2 Les fonctions d'une variable réelle **21**

2.1 Notions de bases sur les fonctions . . . 22
2.2 Quelques propriétés des fonctions . . . 26
2.2.1 Les opérations algébriques . . . 26
2.2.2 La restriction . . . 26
2.2.3 Fonctions définies par morceaux . . . 27
2.2.4 Fonctions majorées, minorées, bornées . . . 27
2.3 La composition . . . 29
2.3.1 Monotonie . . . 31
2.3.2 Parité . . . 33
2.3.3 Fonctions périodiques . . . 35
2.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . 36

3 Limites d'une fonction **41**

3.1 Limites finie d'une fonction en un point . . . 41
3.2 Limites infinie d'une fonction en un point . . . 43
3.3 Limites à droite, limite à gauche . . . 44
3.4 Limites d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ . . . 46
3.5 Propriétés des limites . . . 47
3.5.1 Unicité de la limite, majoration, minoration . . . 47
3.5.2 Limites et comparaison . . . 48
3.6 Opérations algébriques sur les limites . . . 50
3.6.1 Limite d'une somme de fonctions . . . 50
3.6.2 Limite d'un produit de fonctions . . . 50
3.6.3 Limite d'un quotient de fonctions . . . 51

3.7 Autres propriétés sur les limites 51
3.7.1 Limite et composée 52
3.7.2 Limite et monotonie 52
3.7.3 Critère de Cauchy 52

4 Quelques fonctions usuelles **55**
4.1 Fonction constante 56
4.2 Fonction identité 56
4.3 Fonction valeur absolue 57
4.4 Fonction partie entière 58
4.5 Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$ 59
4.6 Fonction polynôme 60
4.7 Fonction racine n-ième, puissance rationnelle 61
4.8 Fonction homographique 63
4.9 Fonction logarithme népérien 64
4.10 Fonction exponentielle 66
4.11 Fonctions circulaires (ou trigonométriques) 68
4.11.1 Fonction sinus 68
4.11.2 Fonction cosinus 68
4.11.3 Fonction tangente 69
4.11.4 Fonction cotangente 70
4.12 Fonctions hyperboliques 71
4.12.1 Fonction cosinus hyperbolique 71
4.12.2 Fonction sinus hyperbolique 72
4.12.3 Fonction tangente hyperbolique 73
4.12.4 Fonction cotangente hyperbolique 73
4.13 Fonctions réciproques usuelles 75
4.13.1 Réciproque d'une fonction homographique 75
4.13.2 Réciproque de la fonction sinus : la fonction arc sinus 76
4.13.3 Réciproque de la fonction cosinus : la fonction arc cosinus 77
4.13.4 Réciproque de la fonction tangente : la fonction arc tangente 78
4.13.5 Propriétés des fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente 80
4.13.6 Equations du type $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$ et $\tan(x) = a$ 80
4.13.7 Réciproque des fonctions sh et th 81

5 Continuité des fonctions **83**
5.1 Caractérisation de Weierstrass 84
5.2 Continuité, opérations algébriques et composition 85
5.3 Théorèmes sur la continuité 87
5.4 Continuité, monotonie, injectivité et bijectivité 88

6 Dérivée d'une fonction **91**
6.1 Définition de la dérivabilité de f 92
6.2 Dérivabilité et continuité 93
6.3 Dérivabilité, opérations algébriques et composition 94

6.4 Dérivée et monotonie 95
6.5 Dérivées et extrema 96
6.6 Théorèmes fondamentaux sur les dérivées 97
6.7 Dérivées des fonctions usuelles 99
6.8 Dérivées successives 102
6.8.1 Dérivée $n^{ième}$ 102
6.8.2 Classes de fonction 103
6.8.3 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ 103
6.8.4 Fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ 103
6.8.5 Dérivée $n^{ième}$ d'une somme de fonctions 103
6.8.6 Dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions 103
6.8.7 Dérivée $n^{ième}$ de la composée de deux fonctions. 104
6.9 Fonctions convexes 105

7 Les suites 107
7.1 Définition 108
7.2 Deux suites classiques 108
7.2.1 Suites arithmétiques 108
7.2.2 Suites géométrique 109
7.3 Récurrence d'ordre 2 109
7.4 Limite de suites 110
7.4.1 Introduction 110
7.4.2 Opération algébriques sur les limites 112
7.4.3 Résultats sur les limites de suites 114
7.5 Suites réelles et monotonie 116
7.6 Suites adjacentes 116
7.7 Suites extraites 117
7.8 Critère de Cauchy 117
7.9 Fonctions et suites 118

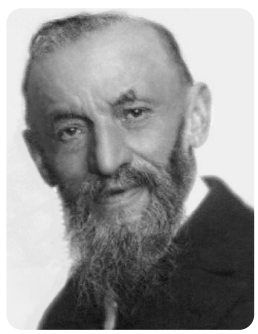
8 Equations différentielles 119
8.1 Equation simple 120
8.1.1 Equation $x' = 0$ 120
8.1.2 Equation $x' = ax(t)$ 120
8.2 Différents types d'équations 121
8.3 Equation linéaire 121
8.4 Solutions 122
8.5 Equations différentielles linéaire d'ordre 1 123
8.5.1 Définition 123
8.5.2 Primitives 123
8.5.3 EDO linéaire sans second membre 127
8.5.4 EDO linéaire avec second membre 128
8.5.5 Cas particulier 129
8.5.6 Existence et unicité 129
8.6 Equations différentielles linéaire d'ordre 2 130

8.6.1 Définition 130
8.6.2 Equations différentielle homogène à coefficients constants 130

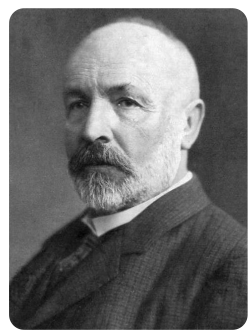
Chapitre 1

Les réels

(a) Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), mathématicien allemand fut un des fondateurs de l'axiomatisation de l'arithmétique. On lui doit notamment une définition axiomatique de l'ensemble des nombres entiers ainsi qu'une construction rigoureuse des nombres réels à partir des nombres rationnels.



(b) Giuseppe Peano (1858 - 1932), mathématicien italien un des fondateurs de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, parallèlement à l'allemand Richard Dedekind, une axiomatisation de l'arithmétique en 1889. On lui doit notamment la notation $\mathbb{Q}$.



(c) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), mathématicien allemand, créateur de la théorie des ensembles. Il montra entre autres choses t que les nombres réels sont « plus nombreux » que les entiers naturels, c'est à lui que l'on doit la notation $\mathbb{R}$.

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des nombres entiers, rationnels et réels.

1.1 Un peu d'histoire

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Pour mémoire, le calcul a été inventé avant l'écriture (il y a $20\,000$ ans mais certains disent $35\,000$ et d'autres plus). Il s'agissait de compter avec des cailloux (calculus en latin) afin d'évaluer des quantités entières.
Ces entiers naturels permettaient de résoudre des équations du type $x + 3 = 5$ par exemple. Cet

ensemble sera par la suite noté $\mathbb{N}$ en 1888 par Richard Dedekind (pour "nummer" qui signifie numéro en allemand).
On notera ainsi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Notons au passage, que c'est René Descarte qui suggéra par convention (que l'on garde encore aujourd'hui) de noter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, et de garder les première lettres pour les paramètres connus. Il s'avéra très vite que les entiers ne pouvaient pas résoudre certaines équations comme $x + 5 = 3$. Il fallut alors introduire un ensemble agrandi du précédent, que l'on appellera entiers relatifs (par rapport à leurs positions à 0). Dedekind notera l'ensemble $\mathbb{K}$, mais on retiendra plutôt la notation $\mathbb{Z}$ (pour zahlen qui signifie nombre en allemand) de Nicolas Bourbaki.
On notera ainsi

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Il fallut ensuite résoudre des équations du type $x \times 3 = 5$. On ne pouvait pas trouver toutes les solutions dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. Un autre ensemble fut alors introduit. L'ensemble des rationnels permettait de contenir l'ensemble des solutions de ce type d'équation, et il fut noté $\mathbb{Q}$ par Giuseppe Peano en 1895 (initiale du mot "quoziente" (quotient) en italien).
On notera ainsi

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers relatifs et } b \neq 0\}.$$

Il ne faut cependant pas confondre les rationnels $\mathbb{Q}$ avec les décimaux $\mathbb{D}$. Les nombres décimaux sont de la forme $a.10^n$ où a et n sont des entiers relatifs. Un nombre décimal a donc un nombre fini de chiffres après la virgule : par exemple $1,23$ s'écrit 123.10^{-2}. Tandis qu'un nombre rationnel sont de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif, et b est un entier relatif différent de zéro. C'est d'ailleurs ici que commence le première piège qu'il faudra éviter, et qui semble assez évident a priori : **on ne divise pas par 0 !**
Un nombre décimal est donc un cas particulier de nombre rationnel.

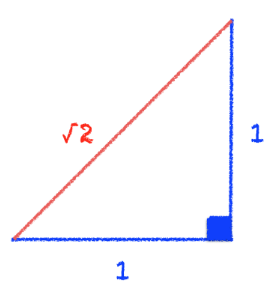


FIGURE 1.2 – Triangle rectangle de côtés 1, 1 et$\sqrt{2}$.

Vint enfin une équation assez simple à résoudre $1^2 + 1^2 = x^2$, autrement dit $x^2 = 2$. Cette équation provenant d'un problème géométrique assez simple (le théorème de Pythagore), n'est pas récente

FIGURE 1.3 – Hugues Charles Robert Méray (1835 à Chalon-sur-Saône -1911), un mathématicien français, professeur à la faculté des sciences de Lyon. En 1869, il donne, le premier, une construction rigoureuse des nombres réels.

(dans une version différence évidemment). Elle date de 500 ans avant J-C environ. Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ date à peu près de cette époque mentionnée dans les manuscrits d'Aristote. Il fallut donner un nom à l'ensemble de ces nombres qui contenait tous les précédents (entiers et rationnels) mais qui n'étaient ni entiers ni rationnels. René Descartes les appela nombres réels en 1637 et c'est Georg Cantor qui désignera l'ensemble des réels par $\mathbb{R}$.
Augustin Cauchy, puis Charles Méray suivi de Georg Cantor établiront que l'ensemble des réels est complet. Autrement dit, contrairement à l'ensemble des rationnels qui contenait encore des “trous” que l'on pouvait remplir avec des réels, l'ensemble des réels ne possède pas de trou. On dit qu'il est complet. Cette notion sera très utile dans la suite des cours d'analyse.

Puis vinrent les nombres complexes et d'autres équations de plus en plus élaborées à résoudre. Nous en aborderons quelques unes dans ce cours (comme les équations différentielles). Pas toutes, ce serait impossible, mais celles qui nous semblent incontournables pour le premier semestre de la première année en analyse. Pour cela il faudra définir les bons outils, leur manipulation précise et rigoureuse (ce que l'on peut faire et ce que l'on ne peut pas faire). Une fois les outils en main nous avancerons progressivement de telle sorte qu'à la fin du semestre, nous aurons effleuré la puissance d'applications de ce que l'on aura appris.

Nous pourrons nous trouver de temps en temps devant des concepts qui pourraient aller à l'encontre de nos intuitions. Comme par exemple :

1. Est-ce que le nombre “juste avant” 1 que l'on note $x = 0.999999999...$ est égal à un ?
2. Est-ce que l'ensemble des entiers est plus grand que celui des entiers relatifs, lui même contenu dans les rationnels ? Et que dire de l'ensemble des réels ?

Les réponses à ces questions ne doivent pas être données si rapidement...nous verrons en cours pourquoi.

1.2 Introduction aux nombres réels

Pour bien manipuler les nombres réels, il faut avant tout connaître quelques règles de base. Ces règles portent toutes un nom afin de les identifier tout de suite et ainsi savoir de quoi l'on parle. Un peu comme sur une carte, cela nous permet de savoir ce que l'on voit, où l'on va et comment on y va. Commençons par les règles simples et connues.

1.2.1 Quelques règles de calcul

Propriété 1 (Règles de calcul)

Soient a, b et c trois nombres réels. On pourra écrire a, b, $c \in \mathbb{R}$. On notera l'addition $+$ et la multiplication $\times$ ou rien du tout ($a \times b$ ou ab quand il n'y a pas d'ambiguïté). On a alors les règles de calcul suivantes :

1. **Commutativité** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$a + b = b + a \text{ et } ab = ba,$$
2. **Associativité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ et } a(bc) = (ab)c,$$
3. **Distributivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$(a + b)c = ac + bc,$$
4. **Elements neutres pour $+$ et pour $\times$** : quel que soit le nombre réel a,
$$a + 0 = a \text{ et } a \times 1 = a.$$

Viennent ensuite les règle de comparaison. C'est important de les exprimer ici, même si elles ont l'air simples. Elles permettront de résoudre un grand nombre de problèmes.
Il est également sage de rappeler que ces règles sont valables pour les nombres réels, mais lorsqu'il s'agira d'étudier les nombres complexes, ce sera une autre histoire.

Propriété 2 (Règles de comparaison)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. On a alors les règles de comparaison suivantes :

1. **Réflexivité** : quels que soit les nombres réels a,
$$a \leq a,$$
2. **Antisymétrie** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \quad \text{alors} \quad a = b,$$
3. **Transitivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \quad \text{alors} \quad a \leq c,$$
4. quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{on a} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a.$$

Remarque *Les règles 1, 2 et 3 de la propriété précédente expriment que $\leq$ est une relation d'ordre, et la propriété 4 que cette relation est totale (voir cours d'Algèbre).*

Remarque

1. *A partir de la relation "inférieur ou égal" $\leq$ définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique "supérieur ou égal" $\geq$ pour tous réels a et b par :*

$$a \geq b \quad \text{si et seulement si} \quad b \leq a.$$

   On remarquera que $\geq$ est également une relation totale.

2. *On définit également la relation"strictement inférieur" pour tous réels a et b par :*

$$a < b \quad \text{si et seulement si} \quad a \leq b \text{ et } a \neq b,$$

   et la relation "strictement supérieur" pour tous réels a et b par :

$$a > b \quad \text{si et seulement si} \quad a \geq b \text{ et } a \neq b,$$

On aborde ensuite les règles dites de compatibilité que la plupart d'entre vous connaissez depuis le collège.

Propriété 3 (Règles de compatibilité)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. On a alors les **règles de compatibilité** suivantes :

1. si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
2. si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$.

Remarque
La règle 2 de la propriété précédente peut également s'écrire avec la relation "stricte", en utilisant le résultat suivant :

$$\text{si} \quad ab = 0 \quad \text{alors} \quad a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ (ou les deux).}$$

On a alors la règle suivante :

$$\text{si } a < b \text{ et } 0 < c \quad \text{alors} \quad ac < bc.$$

Définition 1 (Opposé et inverse)

1. Deux nombres réels a et b sont **opposés** si $a + b = 0$.
2. Deux nombres réels a et b non nuls sont dits **inverses** l'un de l'autre si $ab = 1$.

Propriété 4 (Règles de l'opposé et de l'inverse)

1. Soit a un réel quelconque alors il existe un unique réel b tel que $a + b = 0$.
   On note $b = -a$.
2. Soit a un réel **non nul**, il existe un unique réel **non nul** c tel que $ac = 1$.
   On note $c = \dfrac{1}{a}$ ou encore a^{-1}.

Remarque

1. *L'opposé de a noté $-a$ n'est pas nécessairement négatif ! L'opposé de $a = -5$ par exemple est $-a = 5$! C'est une erreur que l'on rencontre souvent.*
2. *On rappelle encore une fois ici que l'**on ne peut pas diviser par 0 !** Ainsi, lorsque l'on écrira un dénominateur, **il faudra toujours s'assurer que ce dernier est non nul**.*
3. *Toutes les propriétés et règles précédentes nous permettent de dire que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale (comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels). On représente cet ensemble $\mathbb{R}$ par une droite en général, et comme on l'a spécifié dans le préambule, cette droite ne possède pas de trou (on dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet) contrairement à la représentation des l'ensemble $\mathbb{Q}$.*

Quel est l'un des autres avantages de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ et pourquoi est-ce que l'on s'est servi de $\mathbb{R}$ plutôt que $\mathbb{Q}$ dans l'analyse mathématique ? Ce sont les notions des sections suivantes qui vont en apporter les réponses.
Commençons tout d'abord par définir ce qu'est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs types d'intervalles. Tout est assez intuitif, nous garderons cette forme d'intuition dans les définitions sans aller dans les détails.
Voici tout d'abord la définition générale d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Intervalle de $\mathbb{R}$)

On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie de I de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } x \leq z \leq y \quad \text{alors} \quad z \text{ appartient à } I.$$

Remarque

1. *Le fait de considérer* ***une partie*** *I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$).*
2. *Le fait de considérer* ***un élément*** *a de I se note $a \in I$ (qui se lit a appartient à I.*
   Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour des parties, et $\in$ qui est utilisé pour des éléments.
3. *La définition précédente pourrait alors s'écrire :*
   on appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, $y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$
   $$\text{si } x \leq z \leq y \quad \text{alors} \quad z \in I.$$

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous allons les résumer dans les définitions suivantes.

Définition 3 (Intervalle fermé et borné (segment))

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé et borné (appelé aussi segment) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Définition 4 (Intervalle ouvert)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

mais pas que...
Ce sont également les ensembles de la forme :

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\},$$

ou

$$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}.$$

Remarque *Un cas particulier d'intervalle ouvert est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier : $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$.*

Définition 5 (Intervalle ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Définition 6 (Intervalle semi-ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

mais aussi

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}.$$

Définition 7 (Intervalle fermé et non borné)

Soient a et b deux réels . Par convention on appelle intervalle fermé et non borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\},$$

mais aussi

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

Notation 1.1
On notera les intervalles particuliers suivants :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0], \quad \textit{et} \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[.$$

La notation $\mathbb{R}^*$ désignant l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0.

Remarque

1. *L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide (eh oui ! Il faut le considérer celui-ci aussi...), et il est noté $\varnothing$.*
2. *L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton (en anglais "single" veut dire seul). On le note alors entre accolade (est-ce que c'est parce qu'il est seul qu'il a besoin d'accolades pour être réconforté...) ; Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$.*
3. *Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a, a]$ et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé.*
4. *L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme l'intervalle $]a, a[$ donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbb{R}$ alors comme un intervalle fermé.*
   Mais, $\mathbb{R}$ peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit $]-\infty, +\infty[$. Et

donc son complémentaire $\varnothing$ sera considéré comme fermé.
C'est la raison pour laquelle $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Intervalles de $\mathbb{R}$	**Bornés**	**Non Bornés**
Ouverts	$]a, b[;\ \varnothing$	$\mathbb{R};\ ]-\infty, a[;\ ]a, +\infty[$
Fermés	$[a, b];\ \{a\};\ \varnothing$	$\mathbb{R};\ ]-\infty, a];\ [a, +\infty[$
Semi-ouverts	$[a, b[;\ ]a, b]$	

FIGURE 1.4 – Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 8 (Segment)

Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$. On appelle segment, l'ensemble noté $[a, b]$ défini par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tels que } a \leq x \leq b\}$$

Remarque *Nous pourrons utiliser quelques fois la notion de paramétrage du segment. Autrement dit, en essayant d'interpréter, nous laisserons un point se balader entre les bornes de l'intervalle suivant un "temps" t compris entre 0 et 1.*
Pour être plus clair, on aura l'équivalence suivante :

$$x \in [a, b] \textit{ si et seulement s'il existe } t \in [0, 1] \textit{ tel que } x = (1 - t)a + bt.$$

Cette équivalence permet de dire que tout point du segment $[a, b]$ peut être identifié grâce à un paramètre t compris entre 0 et 1. Pour aller plus loin, nous pourrions dire que tout point de se segment peut être identifié comme un certain barycentre des extrémités.
Cela pourra nous servir quand on verra (en cours, ou TD) la notion de convexité.

1.4 Voisinage

La notion de voisinage servira pour les chapitres suivants quand on abordera les notions de limites...Les limites qui seront des outils indispensables en analyse.

Noter que dans ce qui suit (et ce sera valable pour tous les chapitres), dès que l'on considère une quantité aussi petite que l'on veut, on la note ε (la notation usuelle de cette lettre grecque remplaçant le e latin (pour ne pas le confondre avec le e de l'exponentiel), proviendrait d'Augustin-Louis Cauchy qui désignait ainsi les toutes petites erreurs d'approximation, le e étant l'initiale de "erreur" qui a donné ε en grec).

Définition 9 (Voisinage d'un point)

Soit a un nombre réel. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage** de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset V$.

Remarque *On peut aussi dire, c'est équivalent, que $V \subset \mathbb{R}$ est un* **voisinage** *de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, +\varepsilon[\subset V$.*

Remarque *Le voisinage V de a peut s'interpréter donc comme ce qu'il y a autour de a tout en étant très proche de a.*

Définition 10 (Voisinage de l'infini)

On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$ (respectivement $] - \infty, A] \subset V$).

1.5 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Voyons maintenant comment on pourrait construire l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ (ce n'est pas l'unique façon de construire $\mathbb{R}$ mais pour l'instant c'est la seule que l'on puisse aborder dans l'état de nos connaissances).
Pour cela nous avons besoin des notions de borne supérieures et inférieures, pour les utiliser, nous devons auparavant définir les notions de majorant et minorant.

Définition 11 (Majorant, minorant)

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est majorée s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.
2. E est minorée s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \geq m$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé minorant de E.
3. E est bornée si E est majorée et minorée.

Remarque *Attention : comme on l'a noté, M et m n'appartiennent pas nécessairement à E...c'est la toute la nuance entre les notions qui suivent : la borne supérieure et le maximum, la borne inférieure et le minimum.*

Définition 12 (Borne supérieure, Borne inférieure)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un **majorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \geq m$,
2. si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.

On peut caractériser de façon pratique (ce qui pourra servir pour des exercices) la borne $\sup$ et la borne $\inf$ de la façon suivante.

Proposition 1 (Caractérisation des bornes $\sup$ et $\inf$.)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. si la partie E est majorée par un réel M. Alors

   $M = \sup(E)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x \in]M - \varepsilon, M]$.

2. si la partie E est minorée par un réel m. Alors

   $m = \inf(E)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x \in [m, m + \varepsilon[$.

Si les majorants et minorants appartiennent à l'ensemble E, on les appelle maximum et minimum. C'est la toute la différence avec les bornes supérieures et bornes inférieures. Donc ne confondez pas ces notions !

Définition 13 (Maximum, minimum)

Soit $E \subset \mathbb{R}$.
On dit que M est le **maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est le **minimum** de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

On peut maintenant décrire une façon de construire $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute “toutes les bornes sup de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$”.
On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 5 (Propriété de la borne sup)

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.

Propriété 6 (Réel et borne sup)

Tout réel est la borne sup d’un ensemble d’éléments de $\mathbb{Q}$.

Remarque

1. *La première propriété est due à Bernhard Bolzano en 1817.*
2. $\mathbb{Q}$ *n’a pas la propriété de la borne sup :* $\{x \in \mathbb{Q}$ *tel que* $x^2 < 2\}$ *admet* $\sqrt{2}$ *comme borne sup dans* $\mathbb{R}$ *et n’admet pas de borne sup dans* $\mathbb{Q}$.

Voilà, nous avons maintenant quelques outils essentiels pour continuer le cours d’analyse. Bien entendu, ce chapitre est bien loin de couvrir toutes les connaissances accumulées sur ces ensembles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)...mais faute de temps, nous en resterons là. Les plus curieux pourront à loisir se renseigner plus dans ce domaine, un peu en cours d’algèbre, mais également dans la littérature très riche à ce sujet.
En ce qui nous concerne, nous allons aborder une autre notion toute aussi importante dans la suite de ce cours d’analyse : la notion de fonctions.

1.6 Valeur absolue

Rappelons ici quelques propriétés des valeurs absolues que vous êtes censés maîtriser depuis le lycée. Commençons par en donner la définition qui est due à François Viète en 1591.

FIGURE 1.5 – François Viète (1540-1603), mathématicien français, il est le premier à noter les paramètres d’une équation par des symboles et se trouve donc le fondateur de l’algèbre nouvelle ou “logistique spécieuse”.

Définition 14 (Valeur absolue)

Soit a un nombre réel. La **valeur absolue** de a est le nombre réel défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Propriété 7 (Valeur absolue, rappels)

Pour tous nombres réels a et b, nous avons :

1. $|a| \geq 0$, $-|a| \leq a \leq |a|$, $|-a| = |a|$,
2. $\sqrt{a^2} = |a|$,
3. $|ab| = |a||b|$,
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (si on a en plus $a \in \mathbb{R}^*$) , $|x|^n = |x^n|$,
5. si $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ et de façon générale $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$,
6. si $b \geq 0$, $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$,
7. si $b \geq 0$, $|a| \geq b$ si et seulement si $a \leq -b$ ou $a \geq b$,
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire**),
9. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire inversée**).

Une autre propriété que l'on utilisera très souvent en TD.

Propriété 8 (Valeur absolue et distance)

Soit r un réel strictement positif. Pour tous nombres a et b nous avons les deux équivalence suivantes :

1. $|b - a| < r$ si et seulement $a - r < b < a + r$,
2. $|b - a| \leq r$ si et seulement $a - r \leq b \leq a + r$.

1.7 Partie entière

Une notion qui peut vous sembler nouvelle est celle de la partie entière d'un nombre réel. La partie entière a beaucoup d'applications notamment en probabilité, en théorie des nombres mais également dans l'affichage numérique d'appareils de mesures. Elle pourra également nous être utile pour la résolution d'exercices ainsi que pour la preuve de certaines propositions.

Définition 15 (Partie entière)

Soit a un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à a s'appelle la partie entière de a. Nous le noterons $E(a)$ ou $[a]$.

Remarque *Intuitivement, il est assez aisé de voir que pour les nombre positifs, la partie entière d'un nombre est le nombre lui-même "coupé" de ses chiffres après la virgule. D'où le nom de partie entière.*
Par contre pour les nombres négatifs, il faudra faire attention, ce sera le nombre entière inférieur au nombre "coupé" de ses chiffres après la virgule.
Il ne faut donc pas confondre partie entière et troncature ! (la partie entière est la troncature pour les nombres positifs, mais pas pour les nombres négatifs !

Exemple

1. $E(\pi) = 3$,
2. $E(-\pi) = -4$.

Proposition 2 (Valeur absolue et distance)

Soit a un réel. Il existe un unique entier relatif n tel que

$$n \leq a \leq n+1.$$

Remarque *Par conséquent,* $E(a)$ *est l'unique entier tel que* $E(a) \leq a < E(a) + 1$.
Il est important de noter l'inégalité stricte à droite et large à gauche !

Chapitre 2

Les fonctions d'une variable réelle

(a) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), mathématicien allemand, à l'origine entre autres du calcul infinitésimal (avec Newton), ce fut le premier à introduire le terme de fonctions.

(b) Leonhard Euler (1707 - 1783), mathématicien suisse a travaillé également sur le calcul infinitésimal et entre autres choses sur la théorie des graphes. C'est à lui que l'on doit la notation f pour les fonctions.

(c) Nicolas Bourbaki est un mathématicien imaginaire créé par un groupe de mathématiciens 1935 à Besse-et-Saint-Anastaise (France). A l'origine de nombreuses notations, vulgarisation de notions et de symbole, on leur doit entre autres la relation entre fonction et application.

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des fonctions.

Lorsque l'on travaille dans les mathématiques appliquées par exemple, que ce soit en physique, chimie, biologie ou autres, la notion de fonction est très importante.
En **biologie** par exemple, on s'en servirait pour décrire l'évolution d'une population de poisson en fonction du temps. Suivant certaines propriétés, cette population pourrait augmenter dans le cas où la nourriture est suffisamment abondante, ou décroître si jamais il y avait trop de prédateurs (notamment des pêcheurs en surabondance). Connaître les propriétés de cette fonction permettrait de prédire le déclin ou la prospérité de l'espèce de poisson étudiée (comme le cas du cabillaud pêché en atlantique nord (voir figure ci-dessous).
En **physique**, nous pourrions nous intéresser par exemple à la trajectoire d'un objet ou d'une personne : comme un skieur lancé du haut d'une rampe. Trouver les conditions optimales pour qu'il puisse sauter le plus loin possible lui permettrait de gagner la compétition.
Les exemples d'applications se comptent par milliers autour de nous. Nous sommes entourés de

fonctions, certains l'ignorent, d'autres non. Plus vous ferez des mathématiques, et plus vous vous en rendrez compte.

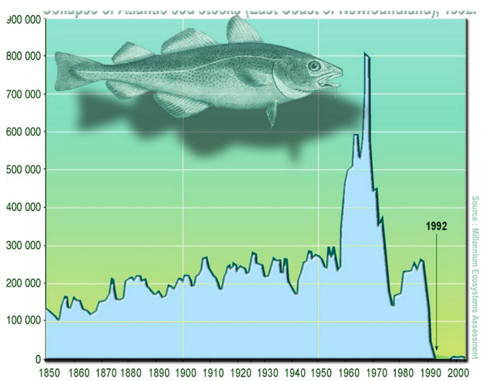


FIGURE 2.2 – Evolution du stock de cabillaud au cours du siècle dernier.

Mais, afin que les études soient le plus rigoureuses possibles, il est nécessaire de bien maîtriser les outils mathématiques utilisés, en l'occurrence ici les fonctions.
Le nom de fonction est apparu assez tard, en 1694 dans un manuscrit de Gottfried Leibniz alors que la notion existait depuis beaucoup plus de temps. C'est ensuite Leonhard Euler qui propose la notation f pour les fonctions en 1734 (après plusieurs tentatives plus ou moins convaincantes par d'autres mathématiciens). C'est enfin Nicolas Bourbaki qui tente de faire le lien entre fonction et application dans les années 1950.
En ce qui nous concerne, nous aborderons ici les fonctions le cadre le plus simple (les plus élaborées se verront dans les semestres suivants, notamment en analyse 3) : ce sont les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelle.
Qu'est-ce que cela veut dire ? Comment les définit-on ? Comment les manipule-t-on ? Quelles sont les fonctions les plus connues ? En somme, que savons-nous de ces fonctions ?

2.1 Notions de bases sur les fonctions

Commençons par donner les définitions de base des fonctions.
On considère ici deux ensemble de E et F inclus dans $\mathbb{R}$. Ces ensembles peuvent être $\mathbb{R}$ lui-même.

Définition 1 (Fonction)

Soit E et $F \subset \mathbb{R}$.
La fonction f définie par un **ensemble de départ** $I \subset \mathbb{R}$ et **par un ensemble d'arrivée** $J \subset \mathbb{R}$ est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I appelé **antécédent** possède au plus un élément dans l'ensemble J appelé **image**.

Remarque *Le fait que chaque élément de I possède au plus une image dans J signifie que certains éléments de I peuvent ne pas avoir d'éléments dans J du tout. Mais d'un autre côté, cela* *veut également dire que les élément de I* ***ne peuvent pas avoir plus d'une image*** *dans J. Ceci est très important, nous le verrons lors que nous tracerons le graphe d'une fonction.*

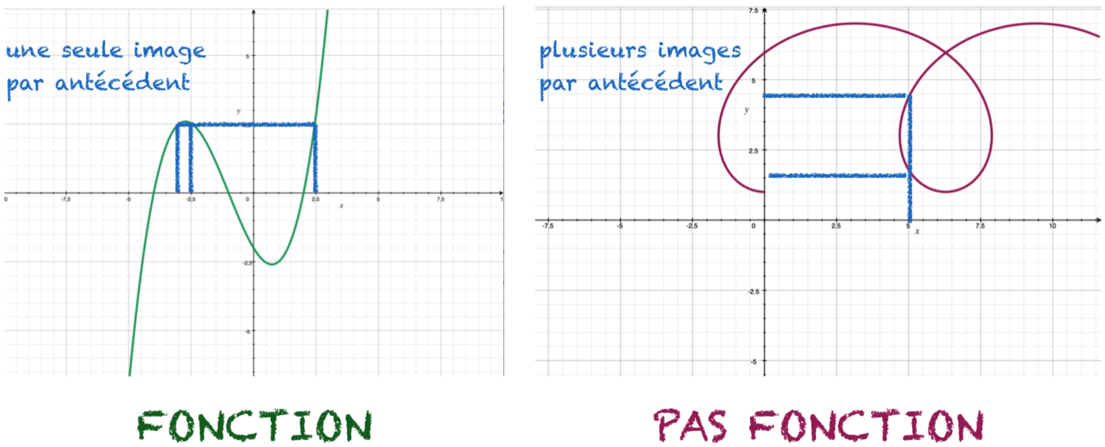


FIGURE 2.3 – Exemple de ce qui est considéré comme fonction (à gauche) et non fonction (à droite).

Que se passe-t-il si l'on ne sélectionne que les éléments de I qui auront exactement une image. En laissant de côté ce qui n'en ont pas. C'est la définition suivante.

Définition 2 (Domaine de définition)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.
L'ensemble des éléments de I qui ont exactement une image dans J par la fonction f est appelé **domaine de définition** de I. On le note $\mathscr{D}_f$.

Du coup, on peut carrément définir les fonctions à partir de leur ensemble de définition. Dans ce cas là, on ne les appellera plus fonctions mais applications.

Définition 3 (Application)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$
L'**application** f définie par un ensemble de départ I et par un ensemble d'arrivée J est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I possède une image et une seule dans l'ensemble J.

Remarque *Une application est donc une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble de départ choisi. En d'autres termes, pour une application de f définie de I dans l'ensemble J, nous avons $\mathscr{D}_f = I$.*
Ou encore, une fonction est une application de $\mathscr{D}_f$ dans J.

Notation 2.1
On note les fonctions f de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Et les applications f de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & J \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

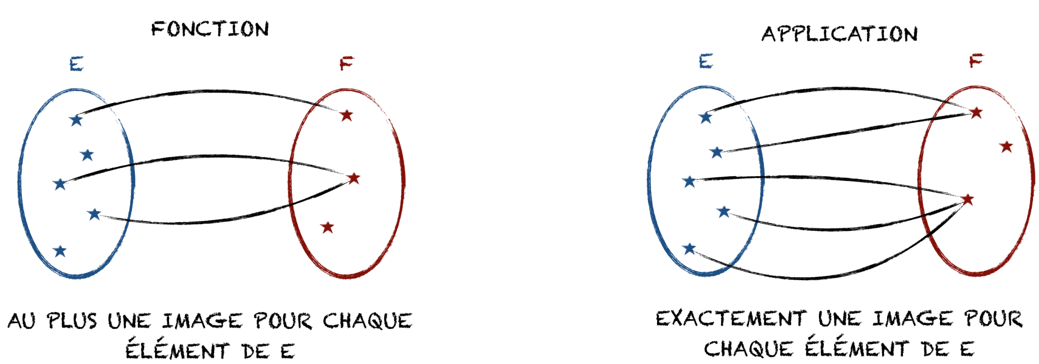
La différence est subtile, tout est question de domaine de départ et domaine de définition.

Attention *: dans chacune de ces définitions,*

1. *la première flèche reliant I ou $\mathscr{D}_f$ à J qui s'écrit $\to$ sans barre verticale à l'extrémité gauche se lit : "dans" (f va de I (ou $\mathscr{D}_f$) dans J).*
2. *la deuxième flèche reliant x à $f(x)$ possède, elle une barre verticale à l'extrémité gauche et se lit : "a pour image" (x a pour image $f(x)$).*

Remarque

1. *En règle générale, on étudiera plutôt des applications en TD, et donc nous essaierons de calculer dans la mesure du possible le domaine de définition de la fonction étudiée.*
2. *Comme dit précédemment, l'élément x dans l'ensemble $\mathscr{D}_f$ est appelé **antécédent** de f, et l'élément $f(x)$ est appelé **image** de x par f.*
3. *Ainsi, l'antécédent se trouve dans le domaine de définition, et l'image dans l'ensemble d'arrivée.*



(a) Représentation d'une fonction. (b) Représentation d'une application.

FIGURE 2.4 – Exemple de fonction et d'application.

Nous pouvons maintenant essayer de tracer ces applications. Les courbes représentant ces applications, appelées également graphes, permettent de les visualiser plus facilement dans un repère en deux dimensions. Pour cela nous avons besoin de définir le graphe d'une application.

Définition 4 (Graphe d'une application)

Le graphe, appelé encore courbe représentative, noté $\mathscr{C}_f$ d'une application $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à $\mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ appartienne à $J \subset \mathbb{R}$.

Remarque *Le graphe de f s'écrit en général de la façon suivante :*

$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x));\ \ x \in \mathscr{D}_f\}.$$

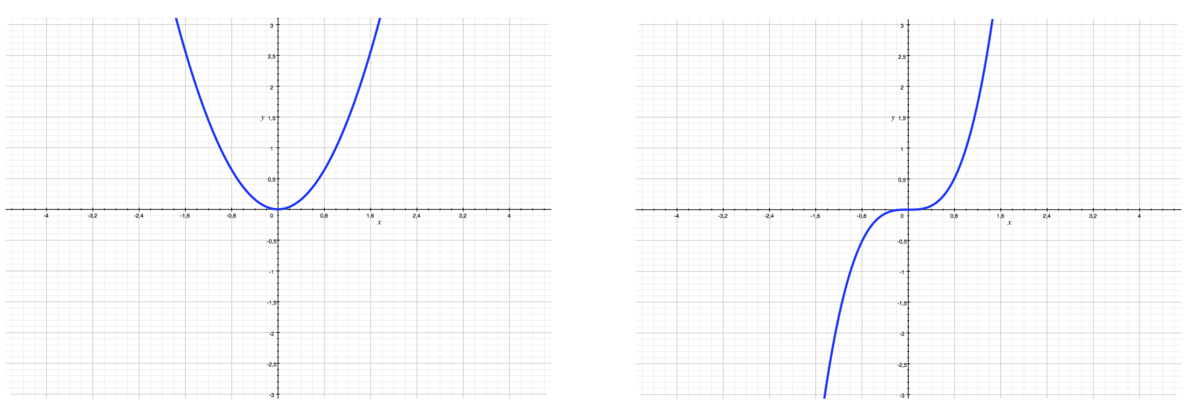
Remarque *IMPORTANT : il ne faudra pas confondre :*

1. *f qui désigne la **fonction** (ou l'application),*
2. *$f(x)$ qui désigne un **nombre réel** (l'image de x par f),*
3. *$\mathscr{C}_f$ qui désigne le graphe de f, autrement une représentation de f dans un repère, c'est une partie du plan.*

***Il ne faudra donc pas dire** : soit $f(x)$ la fonction ! Mais soit f la fonction...*

Exemple *Voici dans les figures suivantes, le graphe de deux fonctions usuelles (que l'on étudiera un peu plus loin dans le chapitre) :*

$$1.\ \ f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad 2.\ \ f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$



(a) Fonction $x \mapsto x^2$ (b) Fonction $x \mapsto x^3$

FIGURE 2.5 – Deux fonctions classiques.

2.2 Quelques propriétés des fonctions

Par abus, dans tout ce qui suit (sauf dans des cas particuliers) nous allons parler de fonctions plutôt que d'applications. Ceci afin de ne pas alourdir les propos et de permettre de donner un cadre général aux propriétés. Toutefois, on gardera en tête qu'il suffira de définir l'ensemble de départ comme étant le domaine de définition pour que le résultat s'applique aux applications. Nous allons donner ici quelques propriétés connues, et d'autres moins connues sur les fonctions. Ces propriétés permettront de décomposer des fonctions un peu compliquées en fonctions connues plus simples.

2.2.1 Les opérations algébriques

Commençons par les opérations connues : somme, produit et division de fonctions.

Définition 5 (Opérations sur les fonctions)

Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a alors les résultats suivant :

1. **Somme** : la fonction somme $f + g$ est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
2. **Produit** : la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
3. **Quotient** : lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie pour tout réel x de I par :
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque *Il est important de rappeler que l'on ne peut pas diviser par 0 et donc il faudra absolument que le domaine de définition de g comprenne entre autre le fait que $g(x)$ ne s'annule pas pour x dans ce domaine.*

2.2.2 La restriction

Il se peut que de temps à autre, nous n'ayons pas besoin d'étudier une applications sur tout son domaine de définition, mais seulement sur une partie. On restreint alors la fonction sur un intervalle plus petit que son domaine de définition.

Définition 6 (Restriction)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle **restriction** de f à I_0 que l'on note $f|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par :

$$\text{pour tout } x \in I_0,\ f|_{I_0}(x) = f(x).$$

Remarque *Cette définition signifie juste que les fonctions f et $f|_{I_0}$ prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'intervalle I_0.*

2.2.3 Fonctions définies par morceaux

L'image de la fonction que l'on avait jusqu'à maintenant est celle d'une courbe assez régulière que l'on peut dessiner à main levée sans trop de problème. Il se peut en fait qu'une fonction soit définie par des petits morceaux que l'on peut rapiécer Ces morceaux de fonctions peuvent se toucher ou non suivant ce que l'on étudie.
Si l'on considère par exemple un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient plusieurs sous intervalles I_1, I_2, ..., I_n (où n est un entier naturel). On suppose que ces intervalles ne se chevauchent pas, sinon nous aurions des problèmes, nous ne serions pas en présence de fonctions dans un cadre général. Ces intervalles peuvent se toucher en découpant ainsi l'intervalle I en n sous intervalles ou non. Supposons qu'en chacun de ces sous-intervalles la fonction f possède une expression différente. Autrement dit, en reprenant la notation de la restriction de la section précédente nous aurions :

$$f|I_1 = f_1,\ f|I_2 = f_2, ..., f|I_n = f_n.$$

La fonction ainsi définie serait une fonction par morceaux.

2.2.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Il se peut que l'on ait besoin de savoir de temps en temps si une fonction peut-être majorée ou minorée (on pourrait par exemple chercher le coût minimum ou maximum d'une opération financière). Pour cela nous devons définir les notions suivantes.

Définition 7 (Fonction majorée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel M, la fonction f est dite **majorée** (par M) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \leq M.$$

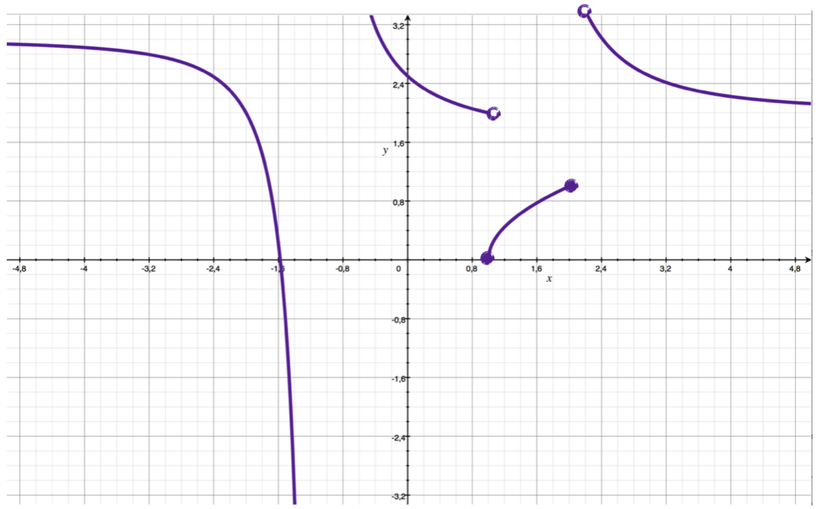


FIGURE 2.6 – Exemple de fonction définie par morceaux.

Définition 8 (Fonction minorée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Etant donné un réel m, la fonction f est dite **minorée** (par m) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \geq m.$$

Définition 9 (Fonction bornée)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque *La majoration ou la minoration de f peuvent ne pas exister. Elles peuvent également ne pas être unique. Il suffit de trouver un majorant ou un minorant qui marche. Si ce majorant (ou minorant) est le plus petit des majorants (ou plus grand des minorants), ça peut être soit la borne supérieure (ou inférieure), soit le maximum (ou le minimum) de la fonction. Tout dépend en fait de l'appartenance ou non de ce majorant ou minorant dans l'intervalle d'arrivée.*

Quelques fois, ce n'est pas un nombre qui majore (ou minore) une fonction. Il se peut que ce soit carrément une autre fonction. Nous avons alors les définitions suivantes.

Définition 10 (Fonction majorée par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f majore g si pour tout x de I :

$$f(x) \geq g(x).$$

On écrit alors $f \geq g$.

Définition 11 (Fonction minorée par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f minore g si pour tout x de I :

$$f(x) \leq g(x).$$

On écrit alors $f \leq g$.

2.3 La composition

Cette partie est nouvelle mais pas très difficile à comprendre. Elle concerne l'"emboîtement" de fonctions les unes dans les autres. Un peu comme des poupées russes. On nomme cet "emboîtement" la composition de fonctions.

FIGURE 2.7 – Exemple de poupées russes "façon petit chaperon rouge". Dans la définition suivante f sera l'action de manger la poire, et donnera le chaperon rouge et g sera l'action de manger le petit chaperon rouge ce qui donne le loup.

Définition 12 (Composition de fonctions)

Soit f une fonction définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction définie de l'intervalle J de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K de $\mathbb{R}$. La **fonction composée** des fonctions f et g est la nouvelle fonction que l'on écrit $g \circ f$ (et que l'on lit g rond f) définie pour tout x dans l'intervalle I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque

Il y aura deux difficultés à affronter dans cette nouvelle notion :

1. *il faudra faire très attention aux ensembles de départs et d'arrivées de chacune des fonctions impliquées,*
2. *à partir d'une fonction composée, il faudra reconnaître quelles sont les fonctions qui la composent, et inversement, à partir de fonctions simples essayer de construire des fonctions compoées.*

L'habitude et la pratique permettront de rendre ces notions très familières.

Remarque

1. *Il n'est pas nécessaire que J soit l'ensemble de départ de g. Il suffit que l'ensemble de départ de g contienne J.*
2. *Nous ne pourrons pas avoir l'égalité suivante en général : $f \circ g = g \circ f$.*
3. *Il existe une fonction que l'on appelle la fonction identité que l'on écrit : Id définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $Id(x) = x$. Autrement dit cette fonction met x en relation avec lui même. Elle ne change rien. On l'écrit de la façon suivante :*

$$Id : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

   Cette fonction identité est importante parce que l'on a les propriétés suivantes :

   (a) *$Id \circ f = f \circ Id = f$. Autrement dit la fonction identité se comporterait comme l'élément neutre pour la loi de composition $\circ$,*

   (b) *la question que l'on peut se poser, est la suivante : existe-t-il une fonction g telle que l'on ait :*

$$f \circ g = g \circ f = Id\,?$$

Ce qui pour tout x dans I pourrait s'écrire : $f(g(x) = g(f(x) = x$. Ce serait une fonction qui permettrait de remettre x en relation avec lui-même après être passé par un intermédiaire.
Ce type de fonction g peut exister (c'est le cas si f est bijective) et c'est la fonction réciproque de f que l'on notera f^{-1} dans la section 2.4.
N.B. : c'est un peu comme, en reprenant l'image du début de cette section, en mangeant une poire on devient petit chaperon rouge et en mangeant le petit chaperon rouge, on redevient une poire. Dit comme ça, cela paraît étrange, mais Raymond Queneau qui a publié des articles de recherche en mathématiques n'était-il pas lui-même un surréaliste ?

2.3.1 Monotonie

Certaines fonctions sont monotones, dans le sens littéral du terme. Autrement dit, elles ne varient pas. Elles sont soit croissantes, soit décroissantes sur un intervalle fixé. C'est ce que nous allons définir ici.

Définition 13 (Croissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Définition 14 (Décroissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 \leq x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Définition 15 (Croissance stricte)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 < x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Définition 16 (Stricte décroissance)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a :

$$\text{si } x_1 < x_2 \quad \text{alors} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

De façon générale nous avons la définition de la monotonie suivante.

Définition 17 (Monotonie)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.

Définition 18 (Monotonie stricte)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'application f est dite **strictement monotone** sur I si elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque *Etudier les variations d'une application consiste donc à regarder sa variation de monotonie et donc à partager son ensemble de définitions en intervalles tels que sur chacun d'eux, la fonction soit monotone.*

On synthétise alors les résultats obtenus dans un tableau de variations.

Définition 19 (Tableau de variations)

Afin de rassembler les informations concernant les variations d'une fonction, on utilise un tableau de variation dans lequel la croissance est représentée par une flèche vers le haut, la décroissance par une flèche vers le vas. On y indique également les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

Voyons quelques propriétés relatives à la monotonie.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE 2.8 – Exemple de tableau de variation pour la fonction $f : x \mapsto x^2$. Remarquez que l'on note dans la deuxième ligne, variation de f et non de $f(x)$. On cherche en effet les variations de la fonction f, tandis que $f(x)$ est un nombre !

Propriété 1 (Somme, produit et composition de fonctions monotones)

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. Si f et g sont croissantes sur I, la somme $f + g$ est croissante.
2. Si f et g sont positives ou nulles sur I. Si f et g sont croissantes sur I, alors leur produit fg est croissant sur I.
3. Si f et g sont croissantes toutes le deux, ou décroissantes toutes les deux alors leur composée (si elle existe), est croissante.
4. Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, alors la composée est décroissante.

2.3.2 Parité

Il sera très utile parfois de regarder si notre fonction (et donc son graphe) est symétrique soit par rapport à l'origine 0 soit par rapport à l'axe des ordonnées (c'est à dire la droite d'équation $x = 0$). En effet, cela nous permettra de n'étudier la fonction que sur une partie de son domaine, l'autre partie se déduisant par symétrie. C'est extrêmement pratique notamment quand on utilisera des valeurs absolues.
Pour cela nous devons définir la parité d'une fonction.

Définition 20 (Fonction paire)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$ (l'intervalle I doit être symétriquement réparti autour de 0) . L'application est dite **paire** si pour tout réel x de I nous avons

$$f(-x) = f(x).$$

Définition 21 (Fonction impaire)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$ (l'intervalle I doit être symétriquement réparti autour de 0) . L'application est dite **impaire** si pour tout réel x de I nous avons

$$f(-x) = -f(x).$$

Remarque *Si f est paire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'axe de des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$)*

Remarque *Si f est impaire, sa courbe représentative (son graphe) est symétrique par rapport à l'origine O.*

Remarque *IMPORTANT : toute application f impaire s'annule en 0. Autrement dit, si f est impaire $f(0) = 0$.*

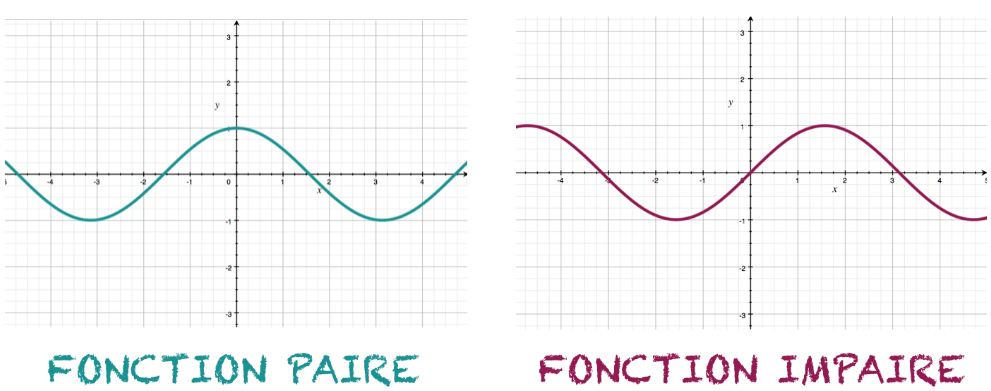


FIGURE 2.9 – Exemple de fonction paire (à gauche) et impaire (à droite).

Il se peut que l'axe de symétrie ne soit pas l'axe des ordonnées. La fonction ne sera alors pas paire, mais juste symétrique par rapport à un autre axe. Supposons que ce soit la droite verticale d'équation $x = a$. Nous avons alors la propriété suivante.

Propriété 2 (Axe de symétrie quelconque)

Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel de I tel que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathscr{C}_f$ de f admet commet la droite d'équation $x = a$ pour **axe de symétrie** si et seulement si pour tout réel x :

$$f(a + x) = f(a - x).$$

Il se peut que le centre de symétrie ne soit par l'origine. Dans ce cas, la propriété suivante nous permet de prouver qu'un point A de coordonnées (a, b) du plan est un centre de symétrie pour l'application f.

Propriété 3 (Centre de symétrie quelconque)

Soit f une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et b deux réels tels que pour tout x de I l'on ait :

$$a + x \in I \text{ et } a - x \in I.$$

Le graphe $\mathscr{C}_f$ de l'application f admet le point A de coordonnées (a, b) pour **centre de symétrie** si et seulement si pour tout réel x de I

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b.$$

2.3.3 Fonctions périodiques

Penchons-nous maintenant sur les fonctions périodiques. Montrer qu'une fonction est périodique peut être très utile, dans le sens où, un peu comme dans le cas de la parité, cela permet de réduire fortement le domaine d'étude de la fonction, en l'occurrence ici sur une seule période.

Définition 22 (Fonction périodique)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit T un nombre réel non nul tel que pour tout x de I l'on ait :

$$x + T \text{ dans l'intervalle } I.$$

L'application f est dite **T-périodique** si pour tout réel x de I :

$$f(x + T) = f(x).$$

T est alors appelé la période de f.

Remarque *Si f est une application périodique et si T et T' sont deux périodes de f telles que $T + T' \neq 0$, alors $-T$ et $T + T'$ sont également des périodes de f.*

f peut donc posséder plusieurs périodes de f. La plus petite d'entre elle est appelée **période fondamentale**.

Définition 23 (Période fondamentale)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. On suppose f périodique. Si l'ensemble des périodes strictement positives de f a un plus petit élément T_0, celui-ci est appelé **période fondamentale** de f. Toutes les périodes de f sont alors de la forme nT_0, où n est un entier relatif.

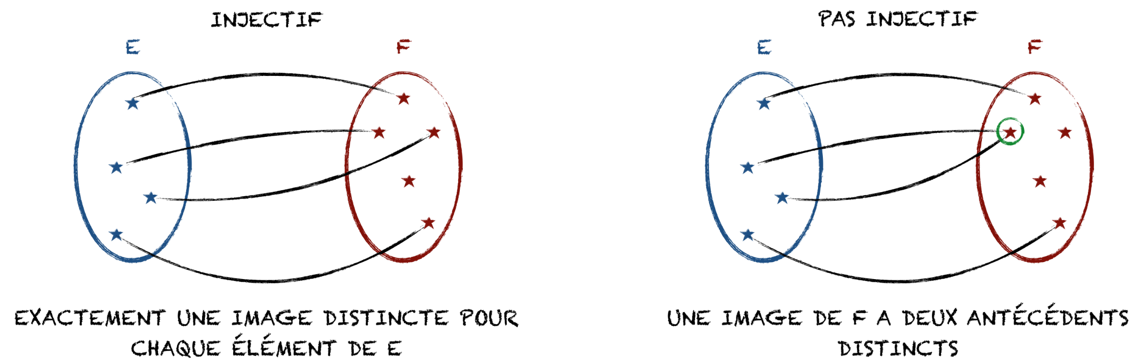
2.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité sont nouvelles pour la plupart d'entre vous. Mais elles ne sont pas compliquées quand on comprend ce qu'elles représentent.
Considérons une fonction f définie d'un ensemble I de $\mathbb{R}$ vers un ensemble J de R. On rappelle alors que I représente l'ensemble de départ et J l'ensemble d'arrivée.

Définition 24 (Fonction injective)

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est **injective** si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au plus un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit aucun mais pas plus de un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tous x_1 et x_2 de I,

$$\text{si } f(x_1) = f(x_2) \text{ alors } x_1 = x_2.$$



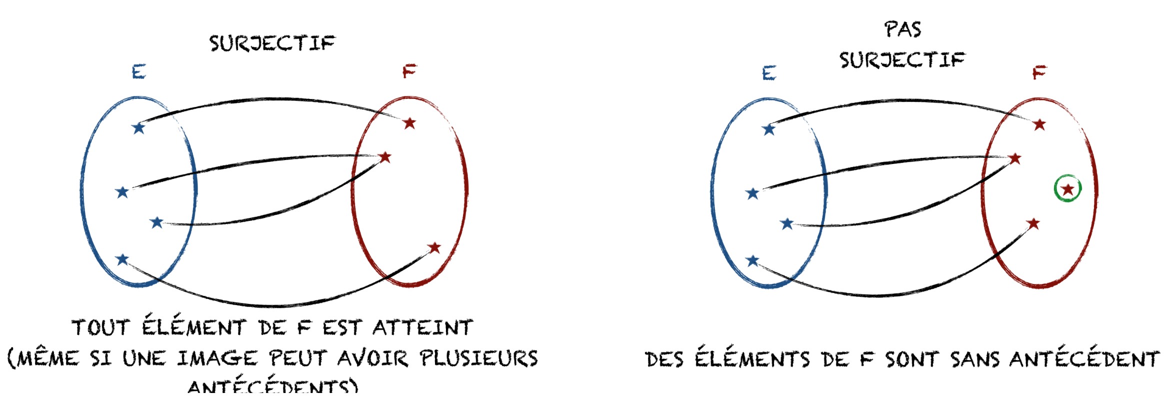
(a) Injection. (b) Non injection

FIGURE 2.10 – Concept d'injection (à gauche) et de non injection (à droite).

Définition 25 (Fonction surjective)

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est **surjective** si et seulement si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet au moins un antécédent dans l'ensemble I de départ.
Autrement dit, il en possède soit un, soit plus, mais il est obligé d'en posséder un. En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe (au moins un) x de I tel que

$$f(x) = y.$$



(a) Surjection. (b) Non surjection

FIGURE 2.11 – Concept de surjection (à gauche) et de non surjection (à droite).

Définition 26 (Fonction bijective)

On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est **bijective** si et seulement elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire si tout élément y de l'ensemble d'arrivée J admet exactement un antécédent dans l'ensemble I de départ.
En mathématiques cela s'écrit :
pour tout y de J il existe un unique x de I tel que

$$f(x) = y.$$

Il est alors possible de passer de y à x par ce qu'on appelle la fonction réciproque, que l'on note f^{-1}. Et donc si f est bijective on a :

$$f: \begin{array}{rcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & y = f(x), \end{array} \quad \text{et} \quad f^{-1}: \begin{array}{rcl} J & \to & I \\ y & \mapsto & x = f^{-1}(y), \end{array}$$

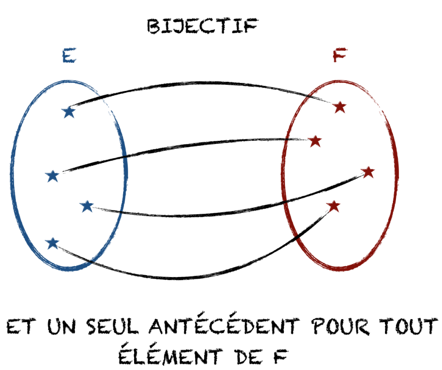


FIGURE 2.12 – Concept de bijection.

Remarque *On pourrait considérer les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité comme la réservation de places dans un avion.*
Ce que le passager aime, c'est avoir de la place à droite et à gauche et donc des places vides. Donc il espère que des places dans l'avion n'auront pas été prises. C'est l'injectivité : si l'on désigne au hasard des places dans l'avion, certaines seront occupées d'autres non. On peut alors faire entrer complètement la liste des passagers (ou l'injecter si on peut oser la métaphore) dans l'avion.
D'un autre côté, ce que la compagnie aérienne souhaite, c'est de vendre plus de billet que de places disponibles. Autrement dit, elle pourra éventuellement se trouver en grande difficulté si tous les passagers se présente : c'est le surbooking qu'on pourrait appeler surjection ici. Autrement dit, si l'on fait rentrer tout le monde dans l'avion, chaque place pourra être occupée par un ou plusieurs passager (ne me demandez pas comment). Mais aucun siège ne sera vide. La surjection dans le cas de l'aviation commerciale peut s'avérer être un jeu dangereux mais rentable.

Enfin, la condition idéale est quand l'avion est plein, que chaque place est prise par un unique passager. Toutes les places ont été vendues, et chaque passager a son espace personnel. Tout le monde semble satisfait.

FIGURE 2.13 – Solution pour éviter le surbooking : augmenter le nombre de siège et réduire la place pour les jambes ?...Le prix pour passer de la surjectivité à la bijectivité ?

Question.
Comment construire le graphe d'une fonction f^{-1} réciproque d'une fonction f ?
Réponse.
On voit par construction de la fonction réciproque que si l'on suppose x un point de l'intervalle I et y un point de l'intervalle $J = f(I)$ l'image de I par f tel que $y = f(x)$, alors

(x, y) appartient au graphe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si (y, x) appartient au graphe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.

Autrement dit tout point du graphe $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la première bissectrice (c'est à dire la droite d'équation $y = x$).

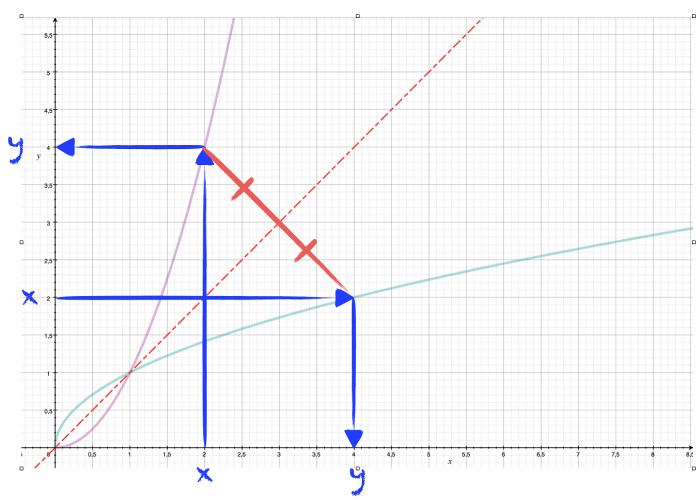
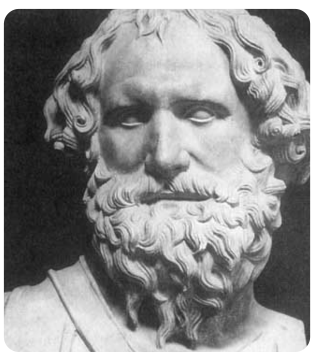


FIGURE 2.14 – Construction de la fonction réciproque (ici la fonction $x \mapsto x^2$ dont la réciproque si $x \geq 0$ est $x \mapsto \sqrt{x}$. La droite pointillée rouge est la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Chapitre 3

Limites d'une fonction



(a) Archimède de Syracuse (287-212 av J.C.), mathématicien grec, a introduit une méthode de limite pour des problèmes de géométrie.

(b) Madhava de Sangamagrama (1350-1425), un mathématicien indien, fut le premier à effectuer le passage à la limite (sur des fonctions trigonométriques).

(c) Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), mathématicien allemand, fut le premier à formuler une définition de la limite avec les ε et δ qu'on utilise encore de nos jours.

FIGURE 3.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés aux limites de fonctions.

Afin de faire une étude plus complète d'une application, nous avons besoin de connaître son comportement en des points particuliers et la plupart du temps aux bornes de son domaine de définition. Nous allons faire la différence entre les limites en un point, et les limites en l'infini. Puis nous verrons quelques propriétés sur les limites.

3.1 Limites finie d'une fonction en un point

Jusqu'à présent la notion de limite que vous aviez vue au lycée était assez "intuitive". Pour une application f définie sur un intervalle I il s'agissait de voir, pour un x dans I vers quoi tendait la valeur $f(x)$ quand x "tendait" vers une valeur a de I. Cette limite quand elle existait était notée par un réel l ou autre chose selon les circonstance, et l'on avait :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Nous allons essayer de mettre sous forme mathématique cette intuition.
Mais auparavant nous allons bien définir vers quoi tend x pour avoir la limite. Quand on cherche la limite d'une fonction f quand x tend vers a il faut que x appartienne bien sûr au domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f sinon chercher vers quoi peut tendre $f(x)$ n'a aucun sens étant donné que $f(x)$ n'est pas défini.
Mais est-ce que a doit appartenir à $\mathscr{D}_f$? Pas forcément est c'est la toute la subtilité de ce qui va suivre.
En effet, a ne doit pas nécessairement appartenir à $\mathscr{D}_f$ mais x qui se rapproche aussi près que l'on veuille de a oui. Donc, le voisinage de a doit être rencontrer celui de $\mathscr{D}_f$.
On y arrive presque. En effet, si a se trouve au "bord" de $\mathscr{D}_f$, son voisinage ne peut pas être inclus du domaine de f.
On prend en compte ce cas, en disant que ce voisinage doit au-moins rencontrer $\mathscr{D}_f$ s'il ne peut pas y être inclus.
D'où la définition suivante.

Définition 1 (Adhérence)

Soient $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, et a un réel. On dit que a est adhérent à $\mathscr{D}$ lorsque pour tout réel $\eta > 0$, l'intervalle $[a - \eta, a + \eta]$ rencontre $\mathscr{D}$. Autrement dit, pour tout réel $\eta > 0$, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $|t - a| \leq \eta$.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une limite en un point telle qu'elle a été introduite par Karl Weierstrass.

Définition 2 (Limite finie en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis (c'est à dire que a et l sont différents de $+\infty$ et $-\infty$) avec a adhérent à I.
On dit que f admet une limite finie l en a, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x - a| \leq \eta \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a} f = l.$$

Remarque

1. *Intuitivement, cette définition signifie que $f(x)$ est aussi près de l que l'on veut (autrement dit dans un voisinage de l aussi petit que l'on veut), à condition de choisir x suffisamment près de a (autrement dit x doit être dans un voisinage suffisamment petit de a).*

2. *La définition de la limite précédente permet dire qu'il y a équivalence entre écrire que $f(x)$ tend vers l et $f(x)-l$ tend vers 0 quand x tend vers a, autrement dit on a équivalence entre :*
   (a) $\lim_{x \to a} f(x) = l$,
   (b) $\lim_{x \to a}(f(x) - l) = 0$,
   (c) $\lim_{x \to a} |f(x) - l| = 0$.

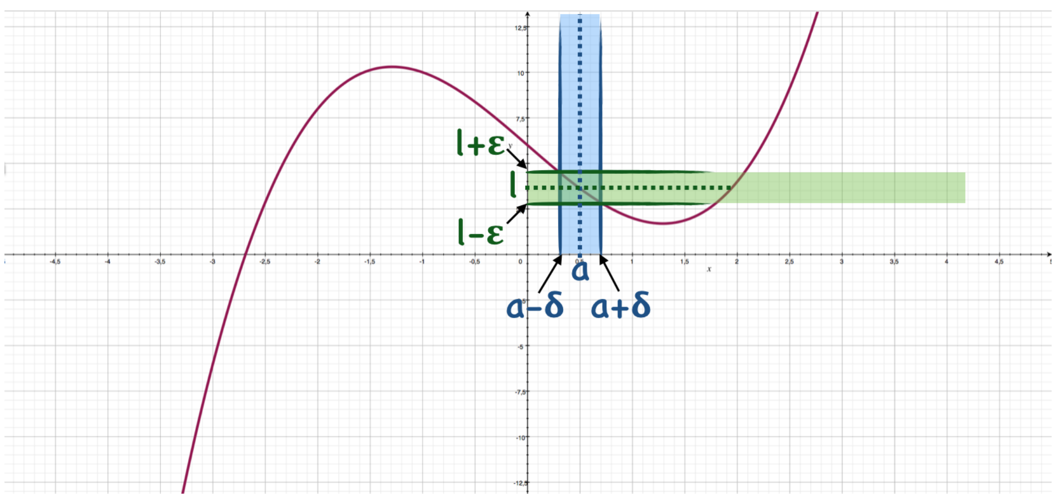


FIGURE 3.2 – Illustration de la définition de la limite finie en un point.

3.2 Limites infinie d'une fonction en un point

Définition 3 (Limite $+\infty$ en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I .
On dit que f admet la limite $+\infty$ et on dit (plus l'infini) en a, si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x - a| \leq \eta \quad \text{alors } f(x) \geq A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{a} f = +\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très grand.*

Définition 4 (Limite $-\infty$ en un point)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I .
On dit que f admet la limite $-\infty$ et on dit (moins l'infini) en a, si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } |x - a| \leq \eta \quad \text{alors } f(x) \leq -A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{a} f = -\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a, $f(x)$ devient très petit.*

Remarque *Lorsqu'on est en présence d'une limite infinie ($+$ ou $-\infty$) en un point fini a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.*

3.3 Limites à droite, limite à gauche

Définition 5 (Limite finie à droite)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis, avec a adhérent à $I \cap]a, +\infty[$.
On dit que f admet une limite à droite en a (on dit encore par valeurs supérieures en a) si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } 0 < x - a \leq \eta \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a^+} f = l.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très proche de l.*

Définition 6 (Limite finie à gauche)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels finis, avec a adhérent à $I \cap]-\infty, a[$.
On dit que f admet une limite à gauche en a (on dit encore par valeurs inférieures en a) si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } -\eta \leq x - a < 0 \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{a^-} f = l.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très proche de l.*

Définition 7 (Limite $+\infty$ à droite)

Soit f une application définie sur son domaine I dans $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à $I \cap]a, +\infty[$.
On dit que f admet une limite $+\infty$ à droite en a si pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } 0 < x - a \leq \eta \quad \text{alors } f(x) > A.$$

On écrit alors comme précédemment

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{a^+} f = +\infty.$$

Remarque *Intuitivement, cela signifie que lorsque x s'approche de a en étant plus grand que a, $f(x)$ devient très grand.*

Remarque *On aurait de façon analogue :*

1. *la limite $+\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a \leq \eta$ par $-\eta \leq x - a < 0$ dans la définition précédente.*
2. *la limite $-\infty$ à droite s'obtient en remplaçant $f(x) \geq A$ par $f(x) \geq -A$ dans la définition précédente.*
3. *la limite $-\infty$ à gauche s'obtient en remplaçant $0 < x - a \leq \eta$ par $-\eta \leq x - a < 0$ et $f(x) \geq A$ par $f(x) \leq -A$ dans la définition précédente.*

3.4 Limites d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Etant donné qu'ici nous allons faire tendre x vers l'infini, il faut qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[b, +\infty[$ (si on cherche la limite en $+\infty$) ou $]-\infty, b]$ (si on cherche la limite en $-\infty$) soit inclus dans $\mathscr{D}_f$. Nous allons pour cela donner un pendant à la définition de l'adhérence de la section précédente.

Définition 8 (Partie non majorée)

Soit $\mathscr{D}$ un partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $\mathscr{D}$ est non majorée lorsque pour tout réel A, l'intervalle $[A, +\infty[$ rencontre $\mathscr{D}$. Autrement dit, pour tout réel A, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $A \leq t$.
On dit que $\mathscr{D}$ est non minorée lorsque pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty, A[$ rencontre $\mathscr{D}$. Autrement dit, pour tout réel A, il existe $t \in \mathscr{D}$ tel que $t \leq A$.

Définition 9 (Limite finie en $+\infty$)

Soit f une application définie sur un intervalle I non majoré. Soit l un réel fini.
On dit que f admet une limite finie en $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } x \geq A \quad \text{alors } |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = l.$$

Remarque

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$, $f(x)$ devient très proche de l.*
2. *si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré et $x \geq A$ par $x \leq -A$, on définit la limite finie en $-\infty$ que l'on note*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \textit{ ou encore } \lim_{-\infty} f = l.$$

Remarque *Dans les deux cas précédents (limite finie l en $+\infty$ ou $-\infty$) on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.*

Définition 10 (Limite infinie en $+\infty$)

Soit f une application définie sur un intervalle I non majoré.
On dit que f admet une limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in I \text{ si } x \geq A \quad \text{alors } f(x) \geq B.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = \infty.$$

Remarque

1. *Ceci se traduit par le fait que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$, $f(x)$ devient très grand.*
2. *Si l'on remplace $f(x) > B$ par $f(x) < -B$ dans la définition précédente on obtient la définition de la limite $-\infty$ en $+\infty$ que l'on note*
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{+\infty} f = -\infty.$$
3. *Si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré et $x \geq A$ par $x \leq -A$, on définit la limite $+\infty$ en $-\infty$ que l'on note*
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou encore } \lim_{-\infty} f = +\infty.$$
4. *Enfin, si l'on remplace l'intervalle I non majoré, par I non minoré , $x \geq A$ par $x \leq -A$ et $f(x) \geq B$ par $f(x) \leq -B$, on définit alors la limite $-\infty$ en $-\infty$ que l'on note*
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ ou encore } \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

3.5 Propriétés des limites

3.5.1 Unicité de la limite, majoration, minoration

Propriété 1 (Unicité de la limite)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I (qui peut éventuellement être fini ou infini, et alors I est non majorée ou non minorée).
Si f possède une limite l en a cette limite est unique.

Propriété 2 (Egalité)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I.
Si f possède une limite l (finie ou infinie) en a on a a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{si et seulement si } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Propriété 3 (Majoration, minoration)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I.
Soient M et m deux réels. Alors :

1. si $\lim_{x \to a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage $f(x) < M$,
2. si $\lim_{x \to a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage $f(x) > m$.

3.5.2 Limites et comparaison

Propriété 4 (Comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a un réel adhérent à I.
Soient l_1 et l_2 deux réels.
Si f et g possèdent respectivement l_1 et l_2 comme limites en a, et s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x),$$

alors

$$l_1 \leq l_2 \text{ (autrement dit } \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)).$$

Propriété 5 (Majoration par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a un réel adhérent à I. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$f(x) \leq g(x),$$

et si de plus $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Propriété 6 (Minoration par une fonction)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit a dans I. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$g(x) \leq f(x),$$

et si de plus $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soient a dans I et l un réel. S'il existe un voisinage de a tel que pour tout $x \in I$ dans ce voisinage

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

et si de plus $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

3.6 Opérations algébriques sur les limites

3.6.1 Limite d'une somme de fonctions

Propriété 7 (Limite de somme)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$
l_1	l_2	l_1+l_2
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

3.6.2 Limite d'un produit de fonctions

Propriété 8 (Limite de produit)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$
l_1	l_2	$l_1 l_2$
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	0	0
0	∞	**Forme indéterminée**

3.6.3 Limite d'un quotient de fonctions

Propriété 9 (Limite de quotient)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $g(x) \neq 0$ sur I. Soit a un réel adhérent à I. Soient l_1 et l_2 deux réels. Alors on a le résultat suivant résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
l_1	$l_2 (\neq 0)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	**Forme indéterminée**
0	0	**Forme indéterminée**

3.7 Autres propriétés sur les limites

Il existe de nombreuses autres propriétés sur les limites que nous n'aborderons pas par manque de temps mais qu'il est recommandé d'avoir vues.

3.7.1 Limite et composée

Propriété 10 (Limite de fonctions composées)

Soient f et g définies respectivement sur I et J. Soient a et b deux réels adhérents respectivement à I et à J, et l un nombre réel. On suppose que la composée $g \circ f$ existe, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$.
Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l.$$

3.7.2 Limite et monotonie

Proposition 1 (Limite et monotonie)

Soit f une fonction croissante (respectivement décroissante) définie sur I et a un point adhérent à $I \cap]-\infty, a[$.
- Si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ n'est pas majorée (respectivement non minorée), alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ (respectivement } -\infty).$$

- Si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ est majorée (respectivement minorée), alors elle admet une limite finie,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x) \text{ (respectivement } \inf_{x<a} f(x)).$$

Remarque

1. *Si on considère a adhérent à $I \cap]a, +\infty[$, on a un résultat analogue en inversant croissante et décroissante.*
2. *On obtient un résultat analogue également quand on fait tendre x vers $+$ ou $-\infty$ sous la forme : toute fonction croissante et majorée admet une limite finie et toute fonction décroissante et minorée admet une limite finie. Il faudra cependant faire attention : la limite n'est en général pas égal à la majoration (ou la minoration) de la fonction.*

3.7.3 Critère de Cauchy

Ce dernier résultat que nous reverrons ensuite adapté pour les suites est important quand on veut montrer l'existence d'une limite finie sans pour autant être capable de la calculer explicitement.

Définition 11 (Critère de Cauchy)

Soit f une fonction définie sur I. Soit a un réel adhérent à I. On dit que f satisfait le critère de Cauchy au point a lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } |x - a| \leq \eta, \text{ et } |y - a| \leq \eta \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

De façon analogue,
- si I est non majoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $+\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } x \geq A, \text{ et } y \geq A \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

- si I est non minoré, on dit que f satisfait le critère de Cauchy en $-\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$,

$$\text{si } x \geq -A, \text{ et } y \geq -A \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2 (Limite critère de Cauchy)

Une fonction f admet une limite finie en a (a fini ou infini) si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy en a.

Chapitre 4

Quelques fonctions usuelles

(a) John Napier (en français Neper) (1550-1617), mathématicien écossais a donné son nom au logarithme népérien qu'il a élaboré avec des tables de correspondances.

(b) Christian Huygens (1629-1695), mathématicien néerlandais, fait le lien entre la primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ et le logarithme népérien.

(c) Vincenzo Riccati (1707 - 1775), mathématicien italien fut l'un des premiers à étudier les fonctions hyperboliques.

FIGURE 4.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés au logarithme népérien et aux fonctions hyperboliques.

Nous allons dans cette section présenter les fonctions les plus connues (qui pourraient sembler nouvelles pour certains d'entre vous). Ces fonctions ainsi que leurs propriétés sont à connaître par cœur. Nous donnerons quelques propriétés essentielles de ces fonctions (notamment leur comportement asymptotique). Mais pour nous ne ferons pas une étude détaillée qui nécessite également la connaissance de leur dérivée (quand elle existe) qui est une notion que l'on abordera seulement dans le chapitre suivant. Les résultats des chapitres suivants seront d'ailleurs un prétexte pour revenir sur ces fonctions et par conséquent de trouver un terrain de jeux d'applications des différents outils que l'on exposera.

4.1 Fonction constante

La fonction constante est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a, \end{array}$$

où a est un nombre réel.
On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = a.$$

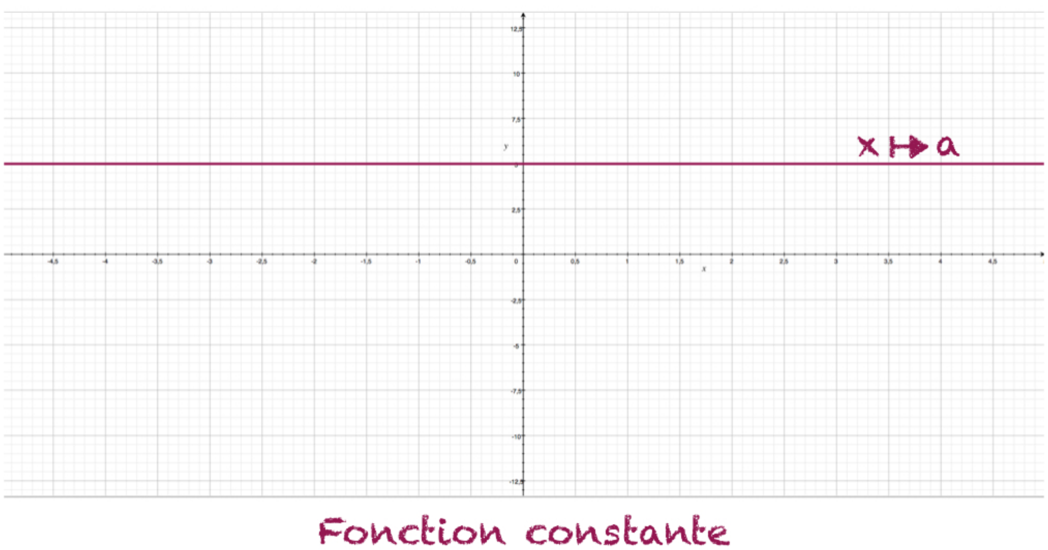


FIGURE 4.2 – Représentation de la fonction constante.

4.2 Fonction identité

La fonction identité est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} Id: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

La fonction identité n'est rien d'autre qu'une fonction linéaire de la forme $f(x) = mx$ dont le coefficient directeur m vaut 1.

On rappelle au passage qu'en déplaçant la fonction linéaire $x \mapsto mx$ de p unités (vers le haut si p est positif ou vers le bas si p est négatif), on obtient la fonction affine $x \mapsto mx + p$. On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x \mapsto +\infty} Id(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} Id(x) = -\infty.$$

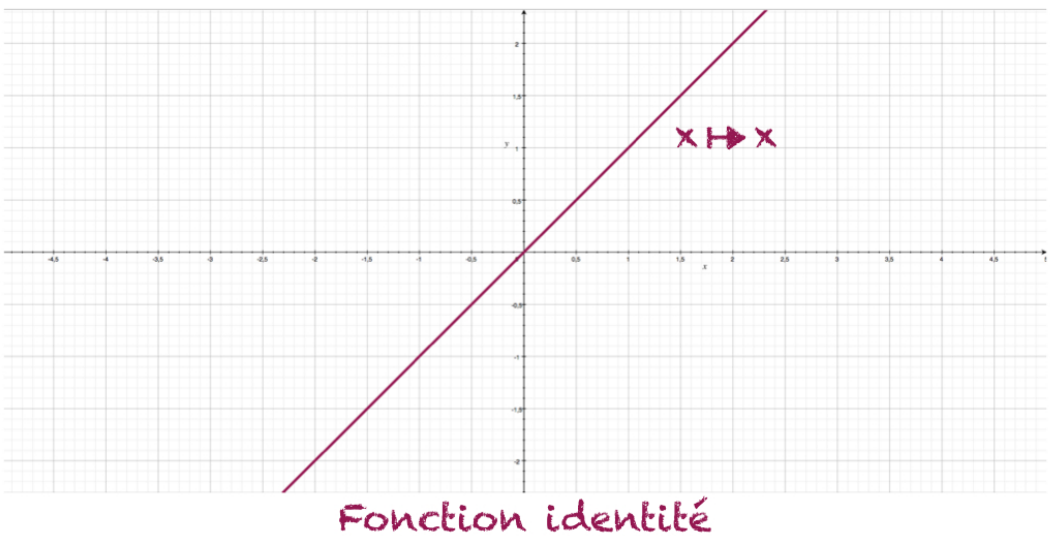


FIGURE 4.3 – Représentation de la fonction identité.

4.3 Fonction valeur absolue

Pour un rappelle sur les propriétés des valeurs absolues d'un nombre, il n'est pas inutile de relire la section (1.6). Ici, nous ne nous intéressons qu'à la fonction valeur absolue.
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} Id: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| = \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{array} \right. \end{array}$$

On peut montrer assez facilement que

$$\lim_{x \mapsto +\infty} |x| = \lim_{x \mapsto -\infty} |x| = +\infty.$$

Une des propriétés liées à la valeur absolue est la suivante.

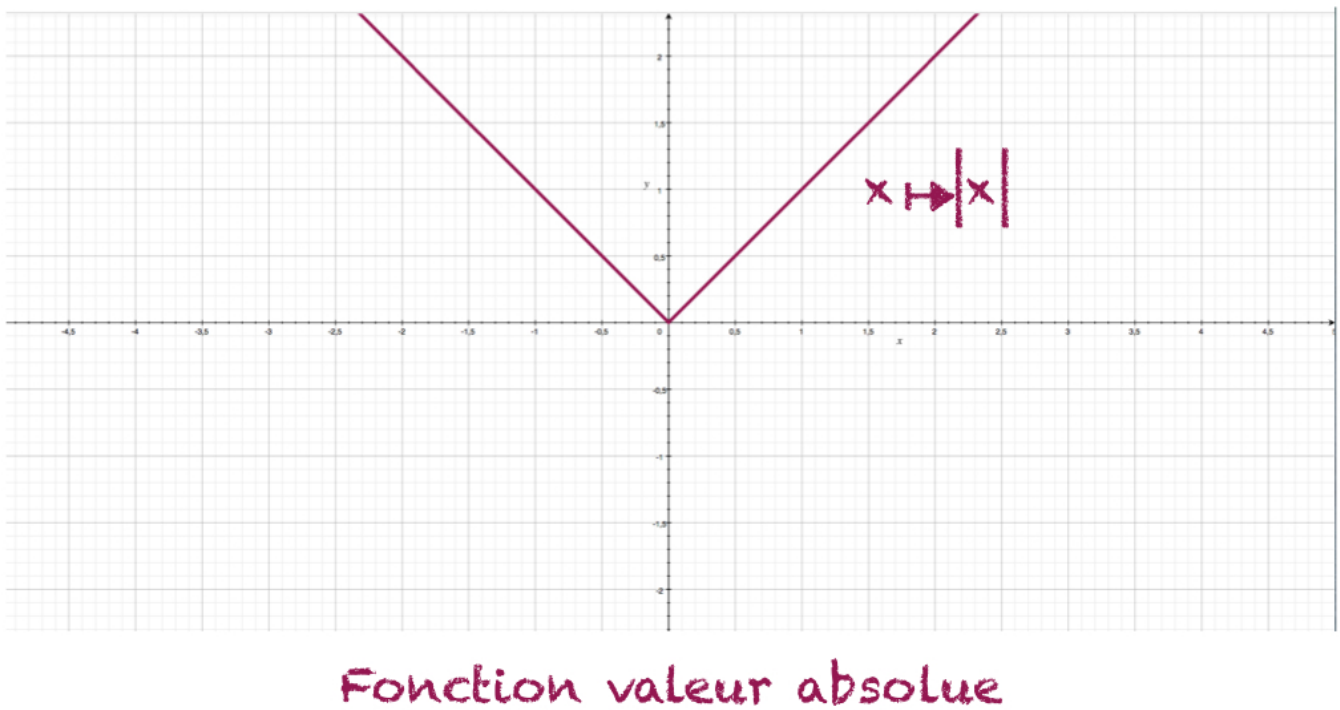


FIGURE 4.4 – Représentation de la fonction valeur absolue.

Propriété 1 (Valeur absolue et fonction bornée)

Soit f une fonction définie sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction f est bornée sur I si la fonction

$$|f| : x \mapsto |f(x)| \text{ est majorée.}$$

4.4 Fonction partie entière

Cette fonction peut-être nouvelle pour certains d'entre vous. C'est la fonction partie entière. Pour la définition et les propriétés de la partie entière, il ne sera pas inutile de revoir la section (1.7). Nous ne nous intéressons ici qu'à la fonction partie entière.
La fonction partie entière que l'on note E est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & E(x), \end{array}$$

où $E(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ dans la définition 15 de la section (1.7).
La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est constante sur tous les intervalles du type $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer sur le graphe de la partie entière que sa représentation n'est pas en "

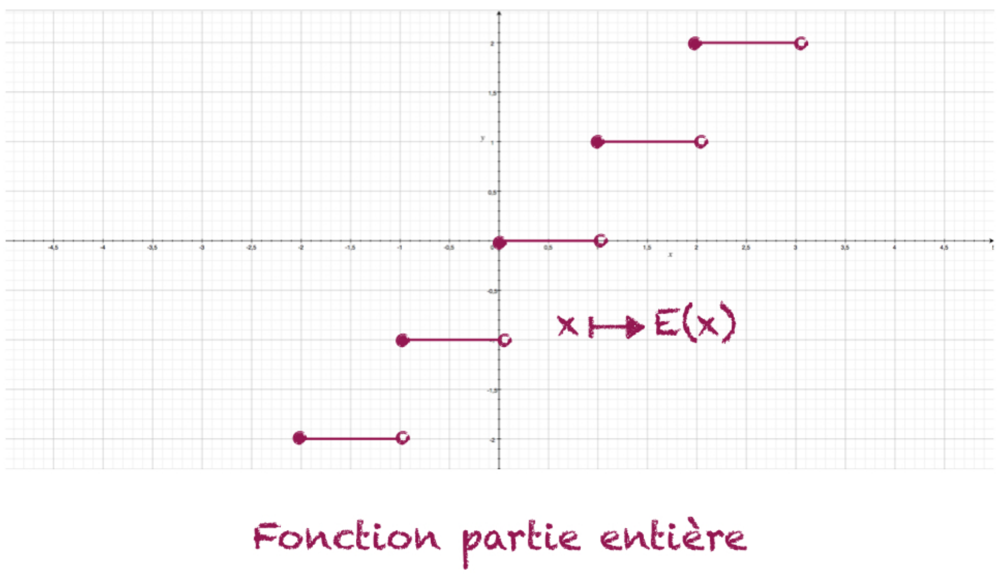


FIGURE 4.5 – Représentation de la fonction partie entière.

un seul morceau". On dira dans le prochain chapitre que la fonction partie entière est continue par morceaux.

4.5 Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$

Commençons par rappeler la définition de la puissance entière d'un nombre réel a.

Définition 1 (Puissance entière)

Soient a un réel non nul et n un entier naturel. La puissance n-ième de a est définie par :

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \text{ (où } a \text{ est multiplié } n \text{ fois).}$$

Notons que si $n = 0$, $a^0 = 1$.

Il est important de noter que cette fonction est définie pour tout réel a. Ce sera important pour donner le domaine de définition de cette fonction.
Continuons par quelques propriétés des puissances entières d'un nombre réel a.

Propriété 2 (Opérations puissances entières)

Soient a, b des nombres réels et n, p deux entiers naturels. On a les propriétés suivantes :

$$a^n a^p = a^{n+p}, \quad (a^n)^p = a^{np}, \quad a^n b^n = (ab)^n,$$

et si en plus b est non nul :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ et } b^n = \frac{1}{b^{-n}}.$$

Remarque *Grâce à ce qui précède on peut généraliser les propriétés à n et p entier relatifs, en faisant attention à chaque fois que pour a^n, avec $n \in \mathbb{Z}$, si la puissance de a est négative, le nombre a ne doit pas être nul, car on ne peut pas diviser par 0 (on ne le répètera jamais assez).*

La fonction puissance entière peut donc être définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Remarque

1. *Si $n = 0$ on retrouve la fonction constante définie plus haut.*
2. *Si $n = 1$ on retrouve la fonction identité Id définie plus haut.*
3. *Si n est pair, la fonction f est paire.*
4. *Si f est impaire, la fonction f est impaire.*
5. *Si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ (c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 0).*
6. *Si $n = -1$ on retrouve la fonction inverse classique :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{-1} = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

4.6 Fonction polynôme

Si l'on considère les puissances entières positives. Nous pouvons faire la somme de plusieurs fonctions puissances entières, qui donnent alors naissance à la fonction polynôme (plusieurs puissances).
On la définit en général avec la lettre p (pour l'initiale de polynôme) de la façon suivante :

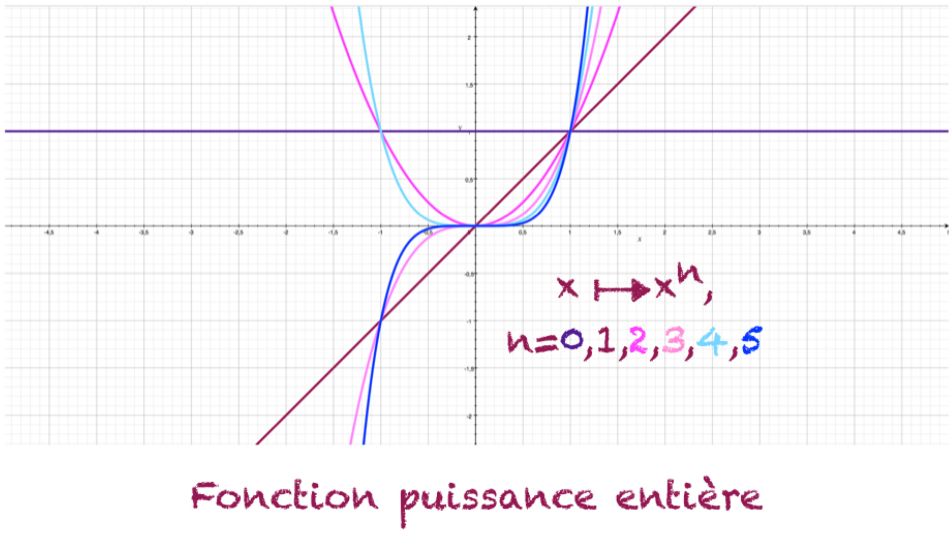


FIGURE 4.6 – Représentation de la fonction puissance entière.

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \end{array}$$

où les a_0, a_1, ..., a_n sont des réels (qui peuvent être nuls) appelés coefficients du polynôme.

Remarque *L'écriture $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ peut se simplifier en utilisant le symbole de la somme de plusieurs éléments en mathématique de la façon suivante :*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

qu'on lit : "somme de $i = 1$ à n de a_ix^i". C'est écriture est beaucoup plus pratique, elle permet d'éviter de surcharger les calculs.

4.7 Fonction racine n-ième, puissance rationnelle

Il se peut que la puissance ne soit pas entière. Elle peut alors être rationnelle. Autrement dit sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Pour éviter les cas particuliers, nous définirons la puissance rationnelle (ou puissance fractionnaire) pour a **un réel strictement positif** :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Remarque

1. *Noter que si $p = 1$ et $q = 2$ on obtient $\sqrt{a}$ et $a > 0$ qui est la racine carrée comme nous la connaissons (mais définie seulement pour $a > 0$).*
2. *Noter que si $p = 1$ et $q = 3$ on obtient $\sqrt[3]{a}$, et $a > 0$ qui est la racine cubique que nous connaissons également (et qui peut être définie sur $\mathbb{R}$).*
3. *Noter que ce n'est pas toujours nécessaire de prendre $a > 0$, mais pour la définition générale d'une puissance rationnelle nous prendrons toujours a dans $\mathbb{R}_+^*$. Sinon il faudra faire attention au rapport $\frac{p}{q}$ qui doit écrit de façon irréductible. Alors seulement dans ce cas, si q est impair on peut définir $a^{\frac{p}{q}}$ pour $a \in \mathbb{R}$.*
4. *Notons enfin que si p est négatif, il faut également prendre en compte le fait que a ne doit pas être nul (sinon on diviserait par 0).*

On peut alors définir la fonction racine n-ième de la façon suivante :
- Si n est pair :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}, \end{array}$$

- Si n est impair :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

Et d'un autre côté la fonction puissance rationnelle (pour n'importe quels $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{p}{q}}. \end{array}$$

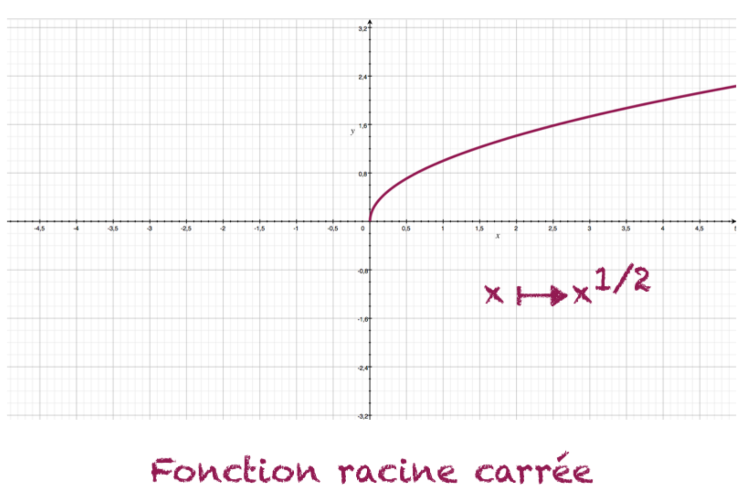


FIGURE 4.7 – Représentation de la fonction racine carrée.

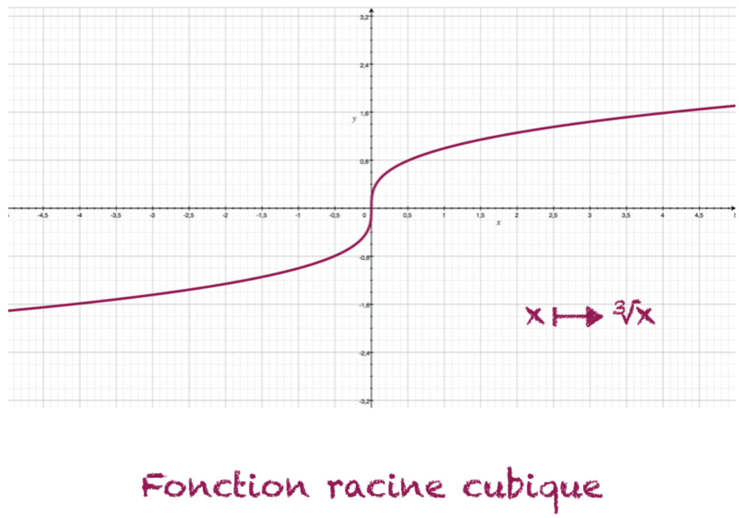


FIGURE 4.8 – Représentation de la fonction racine cubique.

4.8 Fonction homographique

On pourrait penser que les fonctions fonctions homographiques s'appellent ainsi parce qu'elles possèdent toutes la même (*homo* en latin) forme de graphe. Mais c'est en fait un peu plus compliqué que ça. Pour faire simple, dans le plan complexe ce sont des fonctions qui transforment des figures en ces mêmes figures (comme des cercles en cercles, ou des droites en droites...). Mais nous ne développerons pas plus loin cet aspect.
Les fonctions homographiques sont connues depuis le lycée, nous ne faisons que rappeler leur définition ici :

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d}, \end{array}$$

où a, b, c et d sont des réels et c n'est pas nul (sinon on aurait des fonctions affines classiques).
Bien faire attention là aussi à l'ensemble de définition.

En appliquant le chapitre précédent au calcul des limites de ce type de fonctions, nous pouvons observer que leur graphe comporte deux asymptotes :
- une asymptote verticale qui a pour équation $x = -\frac{d}{c}$,
- une asymptote horizontale qui a pour équation $y = \frac{a}{c}$.
D'autre part, en appliquant les résultats de la section (2.3.2), il est possible de prouver que ces graphes possèdent un centre de symétrie que l'on laisse le soin au lecteur de calculer (ce qui pourrait faire l'objet d'un exercice pas trop difficile).

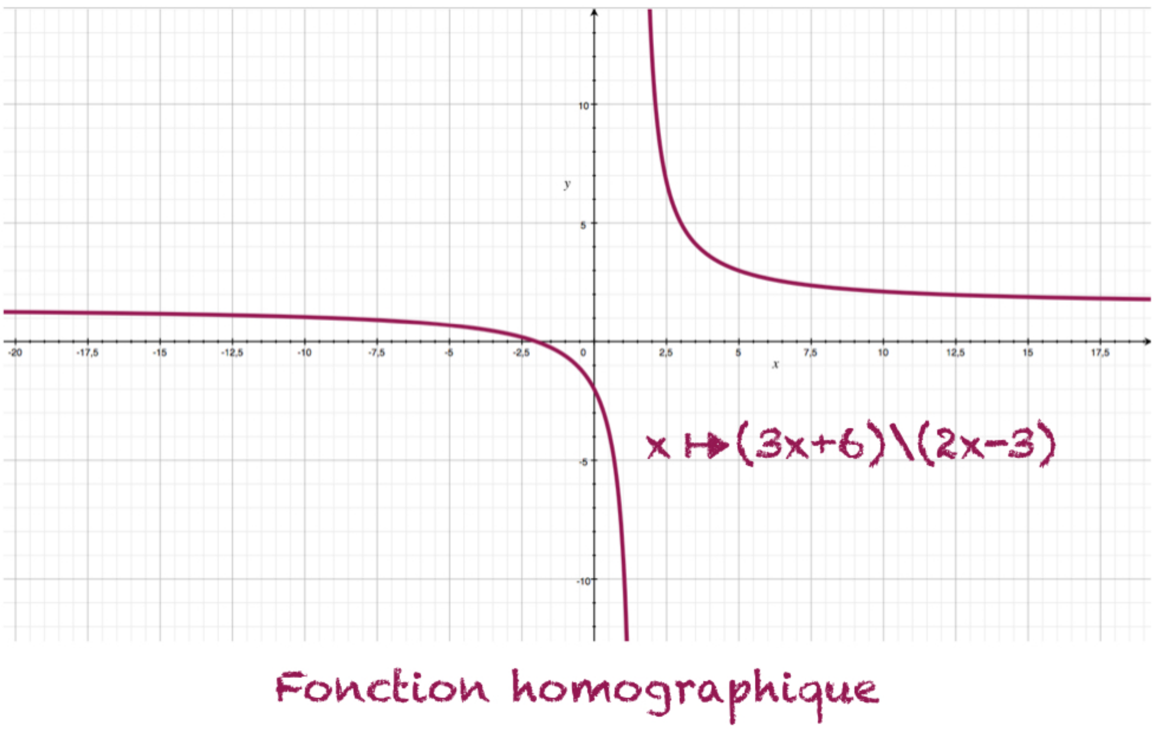


FIGURE 4.9 – Représentation de la fonction homographique.

4.9 Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien (notée $\ln$) est connue depuis la terminale. Cette fonction peut être construite de plusieurs façon :
-comme étant une primitive de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (c'est même en fait l'intégrale entre 1 et x de la fonction inverse) (mais nous n'avons pas encore abordé la notion de primitive ni celle de l'intégrale, cela se fera au prochain semestre),
- comme la réciproque de la fonction exponentielle (que nous allons introduire juste après cette section, qui elle-même peut être construite à partir des suites (les suites que l'on verra dans le chapitre(7)).
Nous laissons donc pour l'instant la construction de cette fonction de côté.
Nous allons juste rappeler cette fonction $\ln$ ici, ainsi que quelques propriétés essentielles.
La fonction $\ln$ est définie de la façon suivante :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x). \end{array}$$

Il est important de noter ici aussi le domaine de définition de cette fonction.

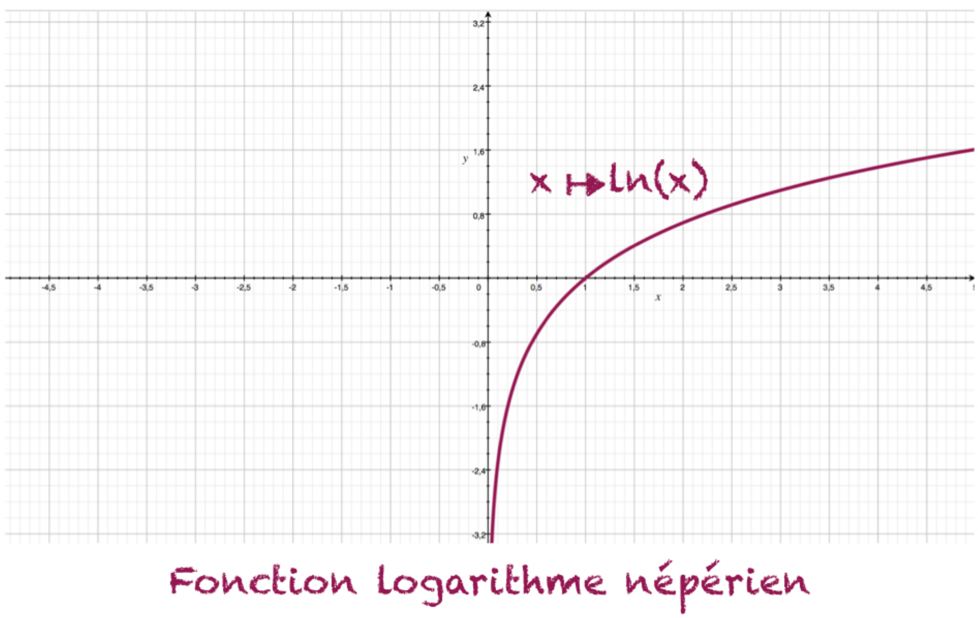


FIGURE 4.10 – Représentation de la fonction logarithme népérien.

Cette fonction possède de nombreuses propriétés qu'il n'est pas inutile de rappeler ci-dessous.

Propriété 3 (Logarithme népérien)

1. Il existe un nombre $e \simeq 2,71828$ tel que $\ln(e) = 1$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs, alors
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b).$$
Cette dernière égalité nous permet d'ailleurs de déduire (en posant $a = b$) que $\ln(1) = 0$.
3. Soient n un entier naturel non nul, et a un réel strictement positif, on a alors :
$$\ln(a^n) = n\ln(a), \quad \text{et} \quad \ln(a^{-n}) = -n\ln(a).$$

Les résultats sur les limites liées à la fonction $\ln$ sont également à connaître et à savoir redémontrer.

Propriété 4 (Limites et Logarithme népérien)

Soit x réel strictement positif,

$$\lim_{x\to+0^+}\ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln(x) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty,$$

mais également

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^p} = 0, \text{ pour } p\in\mathbb{R}_+^*.$$

Il sera utile quelques fois de connaître les logarithme de base 10 (en général pour des applications en physique, chimie ou biologie), et donc plus généralement les logarithmes de base a où a est un réel strictement positif.

Définition 2 (Logarithme de base a)

Soient a un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son logarithme de base a noté $\log_a(x)$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque *Le logarithme népérien* $\ln$ *est le logarithme de base* e*, c'est celui que l'on utilisera le plus souvent, et c'est celui qui est le plus simple, que l'on croise le plus naturellement (même si historiquement ce n'est pas celui-là qui a été utilisé en premier par John Napier (ou Neper) en 1614 qui à donné son nom à cette fonction). C'est pour cela qu'on l'appelle aussi logarithme naturel (celui-ci est dû à Nicolaus Mercator (en 1668)).*

4.10 Fonction exponentielle

Intimement liée à la fonction $\ln$ (c'est sa fonction réciproque), la fonction exponentielle est définie comme suit :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$

Il est important de se rappeler que la fonction exponentielle reste toujours strictement positive. Cela sera très utile de le savoir tout au long de ce semestre. Elle possède, entre autres, les propriétés suivantes :

Propriété 5 (Exponentielle)

1. Pour tous réels a et b,
$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$
2. Pour tout réel a et pour tout entier naturel n
$$(e^a)^n = e^{na}, \quad (e^a)^{-n} = \frac{1}{e^{na}}.$$
3. Pour tout réel strictement positif a et pour tout réel b
$$e^{\ln a} = a, \quad \ln(e^a) = a \quad \text{et} \quad e^{b \ln a} = a^b.$$

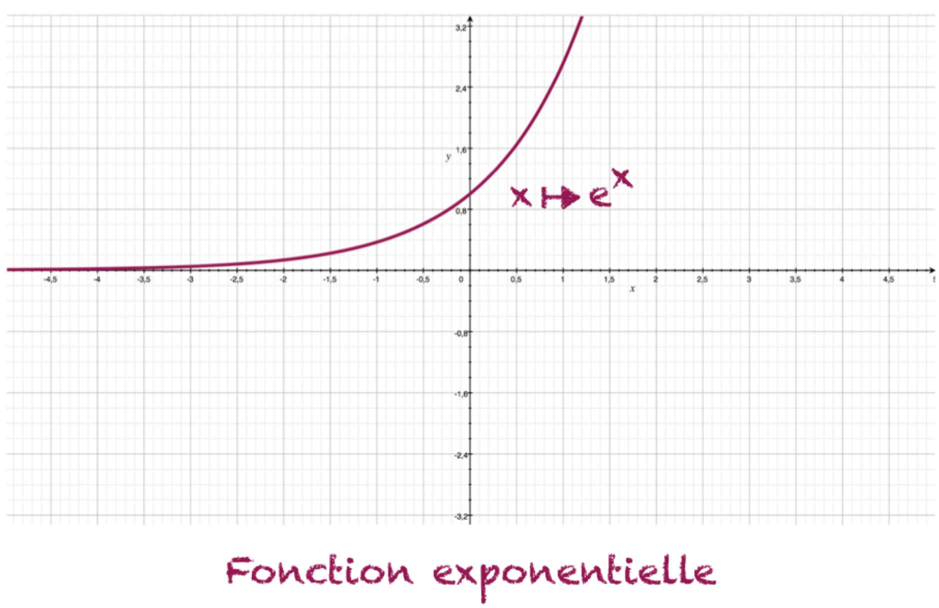


FIGURE 4.11 – Représentation de la fonction exponentielle.

Remarque

1. *Le 3. de la propriété précédente permet de définir la puissance quelconque d'un réel strictement positif a^b, où a est un réel strictement positif et b est un réel quelconque. Et les propriétés des puissances rationnelles marchent encore pour des puissances quelconques si on les définit pour un réel a strictement positif.*

2. *On peut également définir la fonction puissance quelconque (ou fonction puissance "non entière") de la façon suivante :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha, \end{array}$$

où α est un nombre réel quelconque.

On a alors les limites suivantes (que l'on appelle croissances comparées) (c'est à dire que l'on étudie la vitesse de croissance de certaines fonctions par rapport à d'autres)

Propriété 6 (Limites et exponentielles)

Soit x réel. On a alors les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+a)^x}{x} = e^a, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Soit α un réel strictement positif, Soit β un réel quelconque. On a alors les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{-\alpha}} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha(\ln(x))^\beta = 0.$$

4.11 Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

La trigonométrie est connue depuis le collège. Les formules avec sinus, cosinus et tangente sont à connaître par cœur (voir fiche de rappel à la fin de cette section).
Ici nous ne nous intéressons qu'aux fonctions et non pas aux formules. Nous avons :

4.11.1 Fonction sinus

La fonction sinus est définie de la façon suivante :

$$\sin: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

4.11.2 Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie de la façon suivante :

$$\cos: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

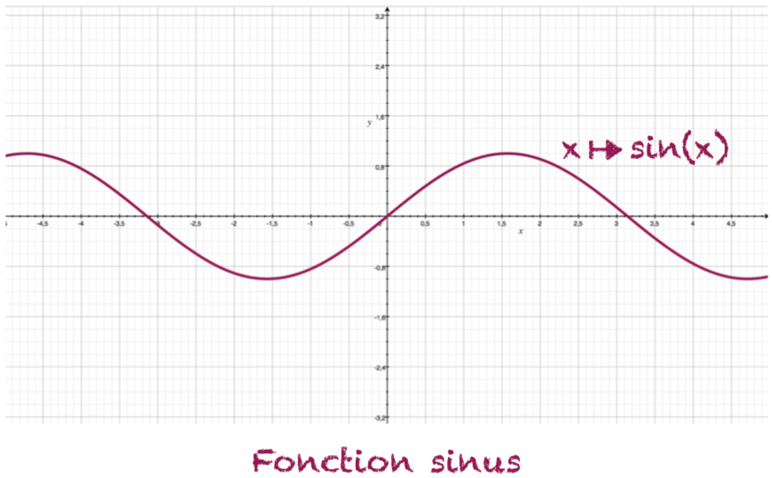


FIGURE 4.12 – Représentation de la fonction sinus.

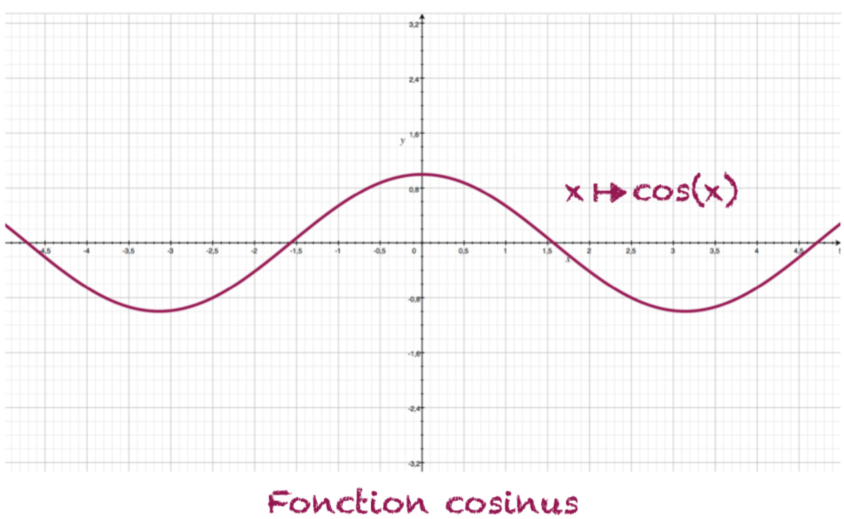


FIGURE 4.13 – Représentation de la fonction cosinus.

4.11.3 Fonction tangente

La fonction tangente est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rlcl} \tan : & \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$

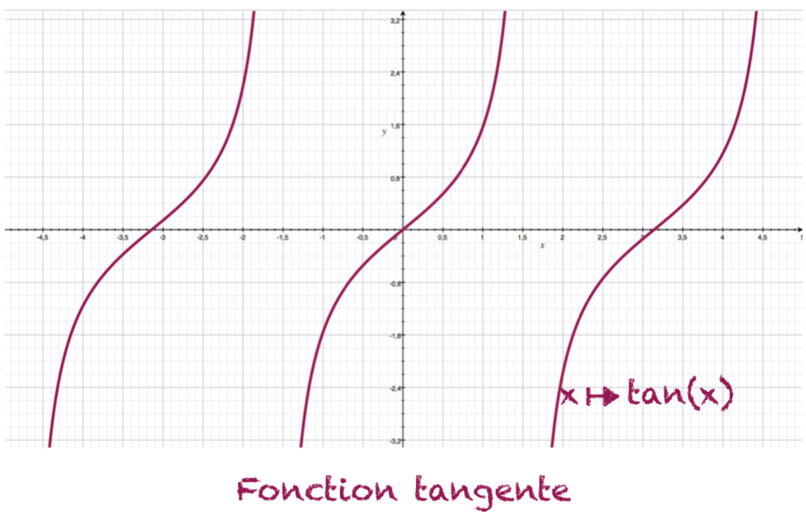


FIGURE 4.14 – Représentation de la fonction tangente.

4.11.4 Fonction cotangente

La fonction cotangente est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rlcl} \text{cotan} : & \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$

Remarque *Nous verrons dans la prochaine section quelques propriétés des fonctions réciproques de ces fonctions trigonométriques.*

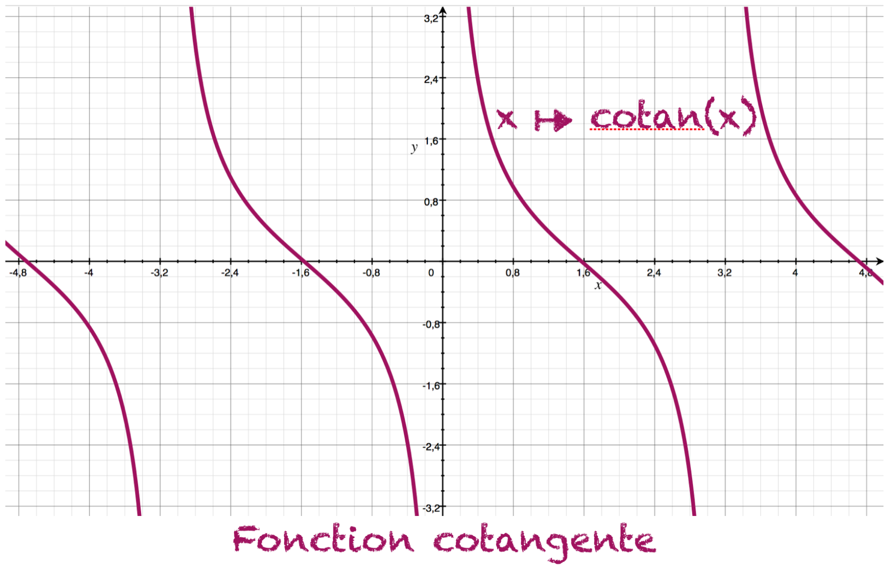


FIGURE 4.15 – Représentation de la fonction cotangente.

4.12 Fonctions hyperboliques

Ces fonctions sont peut-être nouvelles pour certains d'entre vous. Elles sont très utilisées dans les applications pratiques. Ce sont des combinaisons de fonctions exponentielles qui ont des propriétés assez similaires aux fonctions trigonométriques.
Nous donnerons quelques propriétés de ces fonctions à la fin de cette section.

4.12.1 Fonction cosinus hyperbolique

Le graphe de la fonction ch (que l'on va décrire ci-dessous) sur $\mathbb{R}$ décrit une chaînette appelée également vélaire, ou caténaire. De façon très concrète, il représente la forme d'un câble fixé aux deux extrémités et soumis à la pesanteur. Historiquement, l'arc de parabole semblait la forme la plus intuitive pour décrire la forme prise par un fil flexible pendant entre deux supports, c'est du moins ce que pensait Galilée. Mais, très vite, deux scientifiques : Joachim Jung en 1627 d'un côté, et Christian Huygens en 1646 de l'autre apportèrent la preuve du contraire.
Il faudra cependant attendre 1691 pour que simultanément, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens, sous l'impulsion d'un défi lancé par Jacques Bernoulli (le frère de Jean), démontrent que la forme exacte est une chaînette (nom donné par Huygens dans une lettre adressée à Leibniz). C'est cette fonction ainsi que ses cousines appartenant à la même branche de ce que l'on appelle les "fonctions hyperboliques" qui trouveront une multitude d'applications en physique (notamment en architecture) et en biologie que nous allons étudier.
La fonction cosinus hyperbolique notée ch est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{ch}: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

La fonction ch est une fonction paire.

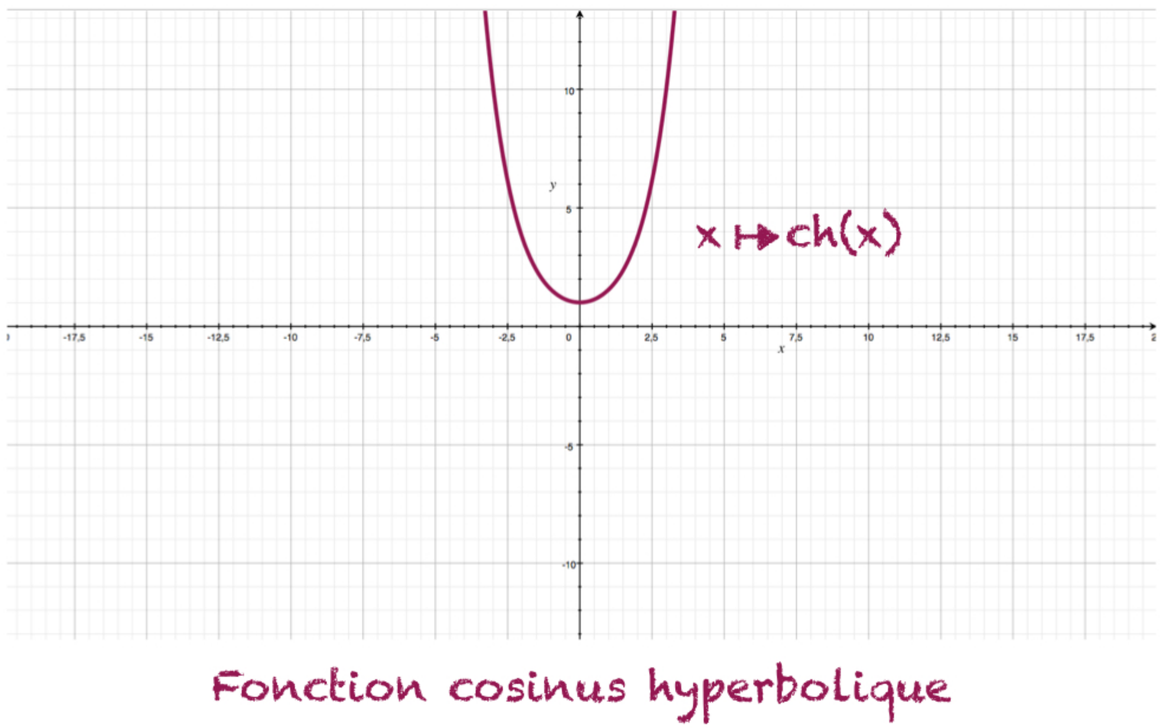


FIGURE 4.16 – Représentation de la fonction cosinus hyperbolique.

4.12.2 Fonction sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \text{sh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

La fonction sh est une fonction impaire.

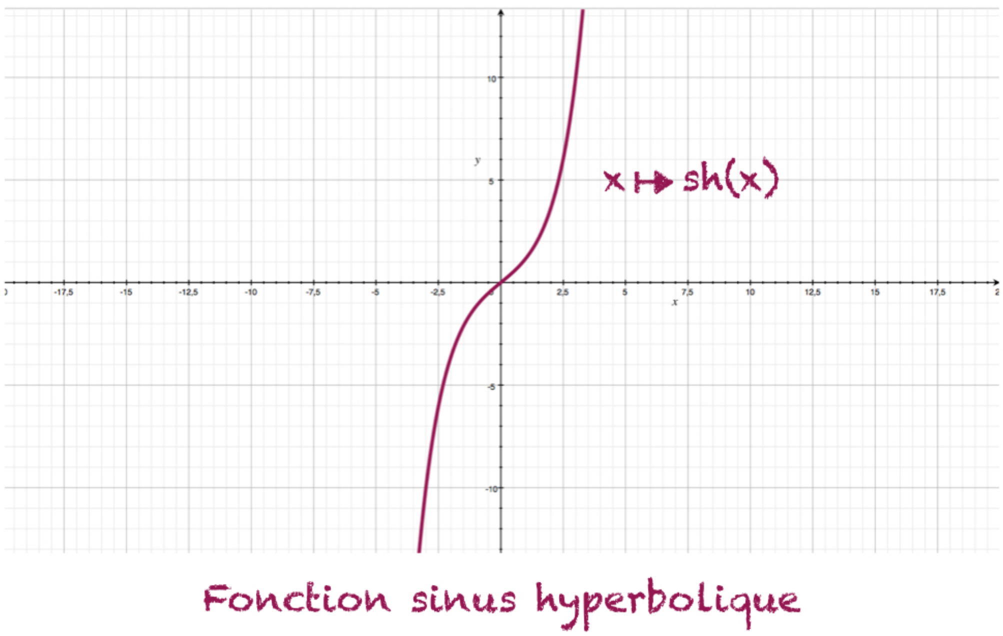


FIGURE 4.17 – Représentation de la fonction sinus hyperbolique.

4.12.3 Fonction tangente hyperbolique

La fonction tangent hyperbolique notée th est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} \text{th} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}. \end{array}$$

4.12.4 Fonction cotangente hyperbolique

La fonction cotangente hyperbolique notée coth est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} \text{coth} : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{coth}(x) = \dfrac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}. \end{array}$$

Remarque *Nous verrons dans la prochaine section quelques propriétés des fonctions réciproques de ces fonctions.*

Par construction, nous avons les formules suivantes.

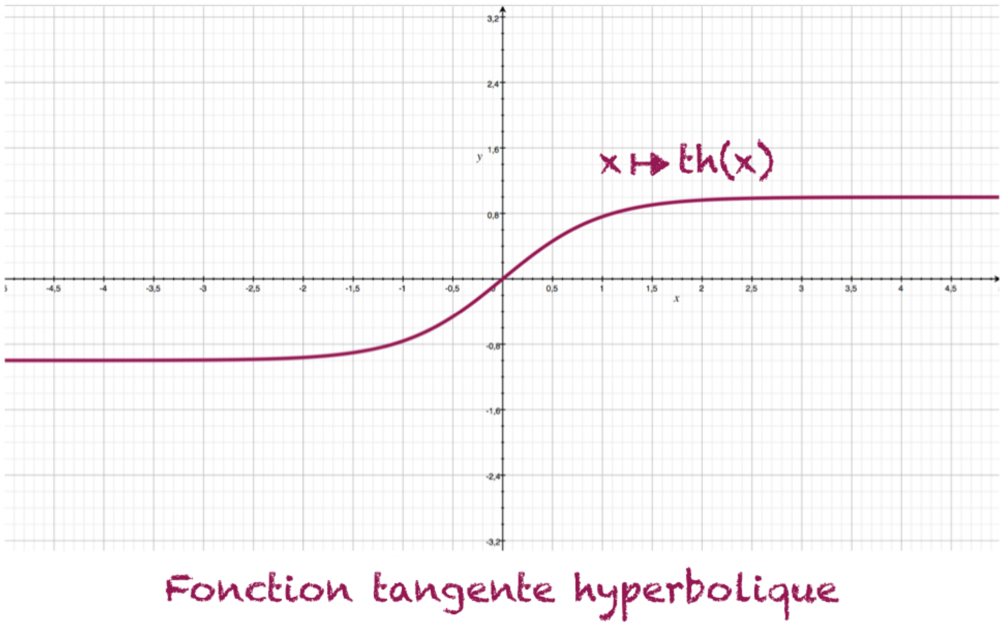


FIGURE 4.18 – Représentation de la fonction tangente hyperbolique.

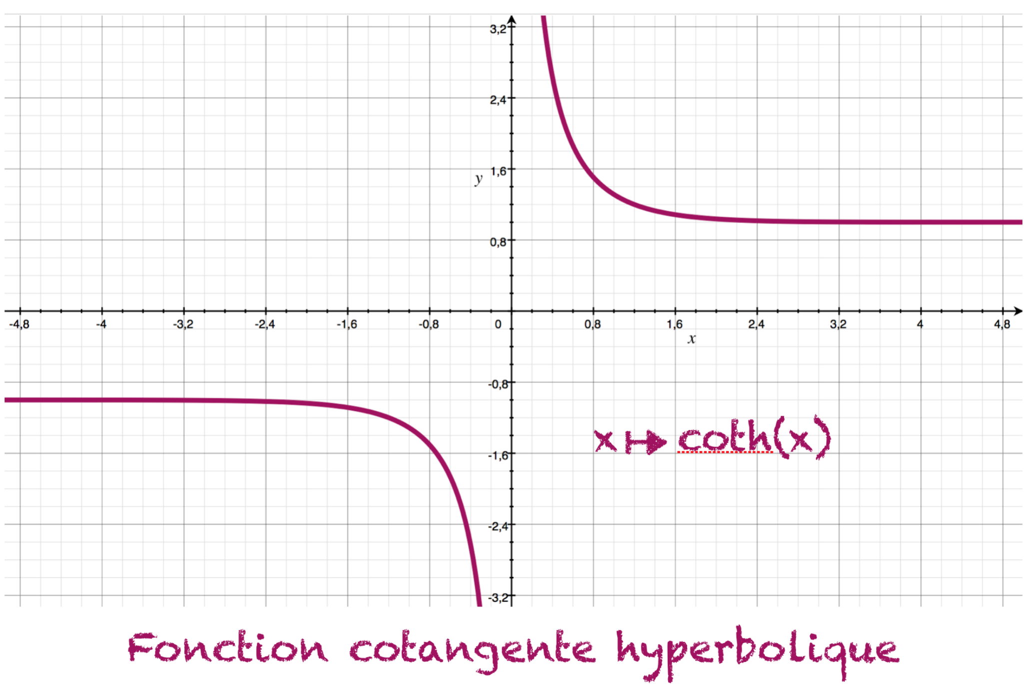


FIGURE 4.19 – Représentation de la fonction cotangente hyperbolique.

Propriété 7 (Egalités hyperboliques)

Soit x un nombre réel. Alors on a :

1. $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$.
2. $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$.
3. $\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$.

4.13 Fonctions réciproques usuelles

Dans cette section nous ne nous intéresserons qu'aux fonctions usuelles bijectives (celles pour lesquelles la fonction réciproque existe). Il faudra ici surtout s'attacher aux domaines de définition de ces fonctions réciproques.
Nous ne nous intéresserons donc ni à la fonction constante, ni à la fonction partie entière, ni à la fonction valeur absolue qui ne sont pas bijective sur leur ensemble de définition.
Nous ne nous intéresserons pas aux fonctions puissance entière, rationnelle, ou réelle car elles ne sont pas en général bijectives (certaines le sont quand même, attention).
Nous ne nous intéresserons pas à la fonction identité ($f : x \mapsto x$) qui est bijective mais dont la fonction réciproque est elle-même.
Nous ne nous intéresserons pas aux fonctions logarithme $\ln : x \mapsto \ln(x)$ et exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$. Ces dernières sont bien bijectives également, mais l'une est la réciproque de l'autre, et donc leur étude revient à écrire la même chose que dans la section précédente.
Nous allons plutôt nous intéresser aux "nouveautés". Il nous reste alors les fonctions homographiques , trigonométriques et les fonctions hyperboliques (sauf $cosh$ qui n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$).

4.13.1 Réciproque d'une fonction homographique

Considérons la fonction homographique f définie de façon générale par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ x & \mapsto & \frac{ax+b}{cx+d}, \end{array}$$

où a, b, c et d sont des réels et c n'est pas nul (sinon on aurait des fonctions affines classiques).
Avec les ensembles de départ et d'arrivée bien définis ci-dessus, on peut dire que la fonction f est bijective, et l'on a sa fonction réciproque qui est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ x & \mapsto & -\frac{dx-b}{cy-a}, \end{array}$$

4.13.2 Réciproque de la fonction sinus : la fonction arc sinus

La fonction sinus que l'on note $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit.
Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction $\sin$ est strictement monotone. Dès qu'elle commence à changer de monotonie, on pose les limites du domaine.
Il est donc naturel de choisir la fonction sinus définie par :

$$\begin{array}{rccl} \sin : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \sin(x). \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction sinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc sinus que l'on note $\arcsin$ et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rccl} \arcsin : & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x). \end{array}$$

Remarque *Comme la fonction sinus, la fonction arc sinus est :*

1. *strictement croissante,*
2. *impaire,*

Remarque *Il est important de souligner qu'étant donné que la fonction* $\sin$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, alors pour tout* $x \in [-1,1]$,

$$\sin(\arcsin(x)) = x,$$

d'un autre côté, comme $\sin$ *est à valeurs dans* $[-1,1]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, la fonction* $\arcsin$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. Mais attention,*

$$\arcsin(\sin(x)) = x, \text{ seulement sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Si l'on prolonge ce domaine, la fonction $\arcsin$ *n'est plus bijective.*

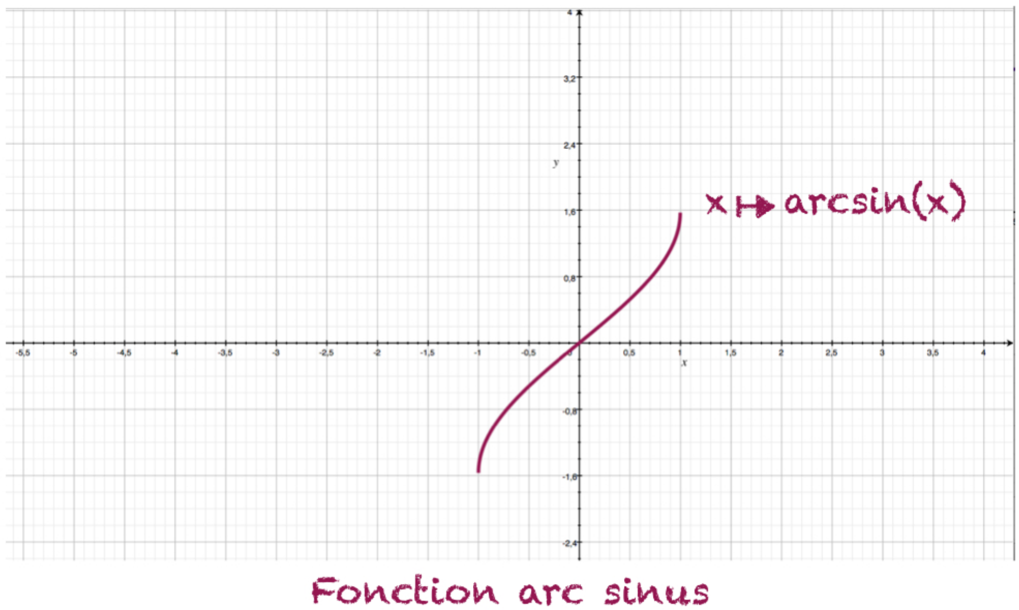


FIGURE 4.20 – Représentation de la fonction arc sinus.

4.13.3 Réciproque de la fonction cosinus : la fonction arc cosinus

La fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit.
Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction $\cos$ est strictement monotone. Dès qu'elle commence à changer de monotonie, on pose les limites du domaine.
Il est donc naturel de choisir la fonction cosinus définie par :

$$\begin{array}{rccl} \cos : & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x). \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction cosinus est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc cosinus que l'on note $\arccos$ et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rccl} \arccos : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x). \end{array}$$

Remarque *Comme la fonction cosinus, la fonction arc cosinus est strictement décroissante. Noter qu'elle n'est ni paire ni impaire.*

Remarque *Il est important de souligner ici aussi qu'étant donné que la fonction* $\cos$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, alors pour tout* $x \in [-1,1]$*,*

$$\sin(\arccos(x)) = x,$$

d'un autre côté, comme $\sin$ *est à valeurs dans* $[-1, 1]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, la fonction* $\arccos$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. Mais attention,*

$$\arccos(\cos(x)) = x, \textit{ seulement sur } [0, \pi].$$

Si l'on prolonge ce domaine, la fonction $\arccos$ *n'est plus bijective.*

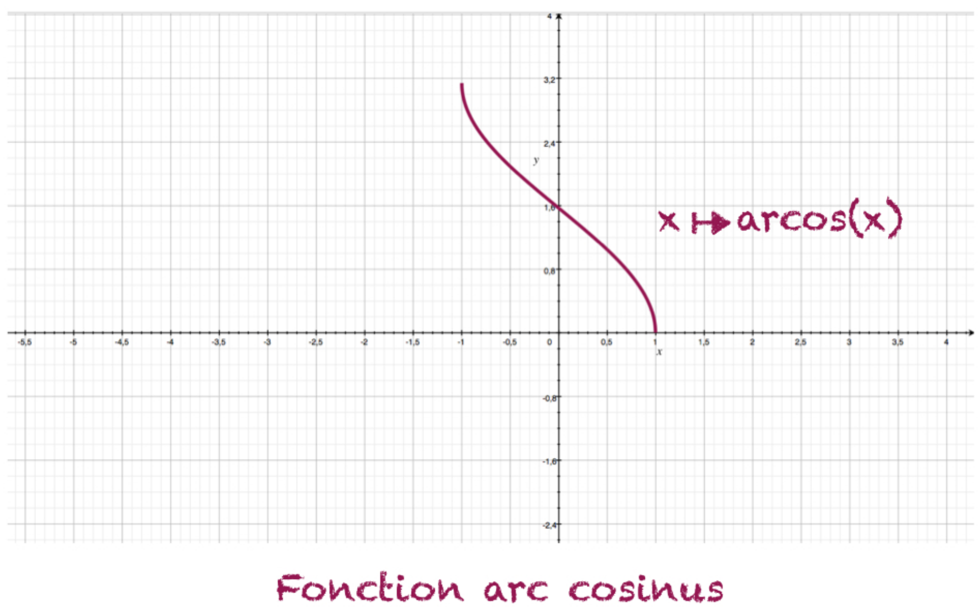


FIGURE 4.21 – Représentation de la fonction arc cosinus.

4.13.4 Réciproque de la fonction tangente : la fonction arc tangente

La fonction tangent $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ n'est évidemment pas bijective. Il faut donc restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée de telle sorte qu'elle le soit.
Intuitivement on va donc restreindre l'ensemble de départ où la fonction $\tan$ est strictement monotone et surjective. Dès que l'on passe les asymptotes verticales, la fonction ne devient plus surjective.
Il est donc naturel de choisir la fonction tangente définie par :

$$\begin{array}{rccl} \tan : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{array}$$

Dans ce cas là, la fonction tangente est bijective, et sa fonction réciproque est appelée arc tangente que l'on note $\arctan$ et que l'on définit par :

$$\begin{array}{rccl} \arctan : & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \mapsto & \arctan(x). \end{array}$$

Remarque *Comme la fonction tangente, la fonction arc tangente est :*

1. *strictement croissante,*
2. *impaire.*

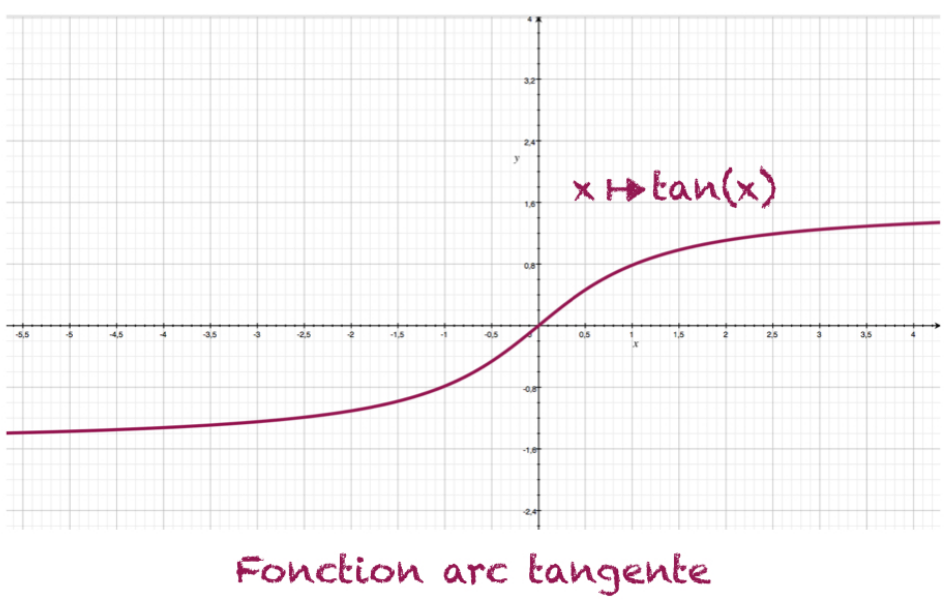


FIGURE 4.22 – Représentation de la fonction arc tangente.

4.13.5 Propriétés des fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente

Propriété 8 (Propriétés d'arc sinus, arc cosinus et arc tangente)

1. pour tout $x \in [-1, 1]$
$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$
2. pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$$\arcsin(\sin(x)) = x.$$
3. pour tout $x \in [-1, 1]$
$$\cos(\arccos(x)) = x.$$
4. pour tout $x \in [0, \pi]$
$$\arccos(\cos(x)) = x.$$
5. pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\tan(\arctan(x)) = x.$$
6. pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$$\arctan(\tan(x)) = x.$$
7. pour tout $x \in [-1, 1]$ $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
8. pour tout x réel strictement positif $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$,
9. pour tout x réel strictement négatif $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

4.13.6 Equations du type $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$ et $\tan(x) = a$

Equation du type $\sin(x) = a$**,** $a \in [-1, 1]$

Posons tout d'abord $\alpha = \arcsin(a)$. L'équation $\sin(x) = a$ s'écrit alors

$$\sin(x) = \sin(\alpha), \text{ avec } a \in [-1, 1].$$

Cette équation a alors pour solution

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ et } x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Equation du type $\cos(x) = a$**,** $a \in [-1, 1]$

Posons tout d'abord $\alpha = \arccos(a)$. L'équation $\cos(x) = a$ s'écrit alors

$$\cos(x) = \cos(\alpha), \text{ avec } a \in [-1, 1].$$

Cette équation a alors pour solution

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ et } x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Equation du type $\tan(x) = a$**,** $a \in \mathbb{R}$

Posons tout d'abord $\alpha = \arctan(a)$. L'équation $\tan(x) = a$ s'écrit alors

$$\tan(x) = \tan(\alpha), \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Cette équation a alors pour solution

$$x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4.13.7 Réciproque des fonctions sh et th

En ce qui concerne les fonctions hyperboliques, nous pouvons montrer que sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans leur ensemble image, les fonctions sh et th sont bijectives (continues, strictement croissantes) mais pas la fonction ch (qui est paire sur $\mathbb{R}$. Nous donnerons donc la fonction réciproque de ch seulement sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Fonction réciproque de sh

La fonction réciproque de sh est la fonction que l'on appelle argument sinus hyperbolique et que l'on note argsh

$$\begin{array}{rccc} \text{argsh :} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \end{array}$$

Fonction réciproque de ch

La fonction réciproque de ch est la fonction que l'on appelle argument cosinus hyperbolique et que l'on note argch

$$\begin{array}{rccc} \text{argch :} & \mathbb{R}_+ & \to & [1, \infty[\\ & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{array}$$

Remarque *Il faudra bien faire attention ici aux ensembles de départ et d'arrivée de la fonction afin que ch soit bijective.*

Fonction réciproque de th

La fonction réciproque de th est la fonction que l'on appelle argument tangente hyperbolique et que l'on note argth

$$\begin{array}{rccl} \text{argth}: & \mathbb{R}_+ & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+a}{1-a}). \end{array}$$

Remarque ***Pour les appelle-t-on fonctions hyperboliques ?***
Nous savons (voir cours de lycée), que l'équation $x^2+y^2=1$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ est l'équation du cercle centrée en $O(0,0)$ et de rayon 1.
D'après la définition du sinus et du cosinus, nous savons alors qu'il existe un angle t unique dans $[0,2\pi[$ qui définira un seul point de ce cercle tel que $x=\cos(t)$ et $y=\sin(t)$.
Penchons nous maintenant sur l'équation $x^2-y^2=1$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, nous pouvons montrer qu'il existe un unique nombre t tel que $y=sh(t)$, et en conséquence $x=ch(t)$ pour $x\geq 0$ (car $x^2=1+y^2=1+sh^2(t)=ch^2(t)$.
Et dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points (x,y) tels que $x^2-y^2=1$ et $x\geq 0$ est une branche d'hyperbole (voir cours sur les coniques).
Cette courbe est également l'ensemble des points $(ch(t),sh(t))$, $t\in\mathbb{R}$.
C'est la raison pour laquelle les fonctions sh et ch sont appelées fonctions hyperboliques.

Chapitre 5

Continuité des fonctions

(a) Bernard Bolzano (1781 – 1848), (Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano), mathématicien né et mort à Prague (à l'époque dans l'empire d'Autriche) à qui l'on doit la définition de la continuité.

(b) Sylvestre-François Lacroix ou De la Croix (1765 - 1843), mathématicien français, reprend la notion de continuité définie par Euler, cas particulier de la continuité que nous connaissons.

(c) Eduard Heine (1821 - 1881), mathématicien allemand a défini la notion de continuité uniforme (que nous n'aborderons pas ici)

FIGURE 5.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la continuité. Noter que Cauchy et Weierstrass ont joué un rôle très important dans cette étude, leur photo se trouvant dans des chapitres précédents, il a semblé plus judicieux de montrer d'autres protagonistes qui ont contribué à l'élaboration de cette théorie.

Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas posés de questions à propos de la continuité de fonctions. Intuitivement, une fonction continue, est à nos yeux une fonction dont le graphe est en un "seul morceau", "sans coupure". c'est ce qui semble le cas pour toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre précédent, sauf peut-être la fonction partie entière, et les fonctions inverses et homographiques. Voyons dans ce chapitre comment formaliser mathématiquement la notion de continuité. Un peu comme nous l'avons fait pour définir la notion de limite de fonctions.

Dans tout ce chapitre, nous considérons I comme un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, et nous considérons a comme un point de I.

5.1 Caractérisation de Weierstrass

Commençons par donner la définition de la continuité d'une fonction en un point que l'on appelle “caractérisation de Weierstrass”).

Définition 1 (Caractérisation de Weierstrass)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit a un point de I.
La fonction f est dite continue en a si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un autre réel $\eta > 0$ (qui dépend du choix de ε) tel que pour tout x de I

$$\text{si } |x-a| \leq \eta \quad \text{alors } |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

Remarque

1. *En d'autres termes, dire qu'une fonction est continue signifie que sa courbe représentative ne présente pas de sauts.*
2. *Le réel η dépend à la fois du ε que l'on va choisir, mais également du point a. Il peut être différent suivant le point a que l'on étudiera.*

La définition précédente peut se caractériser de la façon suivante en termes de limites :

Définition 2 (Continuité et limite)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On dit que la fonction f est continue en I si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De façon similaire on utiliserait la limite à gauche pour parler de continuité à gauche et de limite à droite pour parler de continuité à droite.

Définition 3 (Continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit a un point de I.

1. La fonction f est dite continue à gauche de a si et seulement si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$
2. La fonction f est dite continue à droite de a si et seulement si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Définition 4 (Continuité sur un intervalle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. On dit que la fonction f est continue en I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

5.2 Continuité, opérations algébriques et composition

Comme pour les limites, nous pouvons énoncer quelques propriétés de continuité qui peuvent être conservées des opérations sur les fonctions.

Propriété 1 (Continuité et opérations sur les fonctions)

Soient f et g deux fonctions de I intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que f et g sont continues en a un réel de I. On a alors les propriétés suivantes :

1. la fonction $f+g$ est continue en a,
2. pour tout réel k, la fonction kf est continue en a,
3. si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

En conséquence,

1. une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$,
2. toute fonction rationnelle f définie pour tout x dans l'intervalle I de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes définis sur I avec $Q(x) \neq 0$ sur I, est continue sur I.

Propriété 2 (Continuité et composition de fonctions)

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$. Supposons que f soit continue en $a \in I$, et que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ (où $l \in J$). Si g est continue en l alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(l).$$

Remarque *En conséquence, la composée de deux fonctions continues est continue. Attention toutefois, il faut de la continuité des fonctions dans leur domaines. Dans tous les cas, de toute façon, quand on étudie les fonctions composées, les domaines et images de fonctions sont à manipuler avec précaution. Rajouter de la continuité, ne fait que rajouter des précautions supplémentaires dans leur étude.*

Il arrive quelques fois que certaines fonctions, par leur définition ne soient pas continues. Mais en les dessinant on s'aperçoit que leur graphe possède juste un “trou” que l'on peut facilement “boucher” par un point, afin de recoller la courbe qui les représente. En les rebouchant on dit que l'on peut les prolonger par continuité. D'où la proposition suivante :

Proposition 1 (Prolongement par continuité)

Soit I un intervalle de de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. Soit f un fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On suppose de plus que f admet une limite finie l en a. Alors la fonction g définie pour tout x de I (autrement dit le domaine de définition de f auquel on a ajouté le point a), par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \neq a, \\ l, & \text{si} \quad x = a, \end{cases}$$

est continue en a.
On dit que g constitue le prolongement par continuité de f en a.

Cette proposition pourra s'avérer utile dans le chapitre des équations différentielles, lorsque l'on cherchera des solutions maximales sur deux intervalles séparés d'un point que l'on peut “recoller” en solution globale sur l'union de ces intervalles incluant ce point.

La propriété suivante permet de définir la continuité des fonctions usuelles.

Propriété 3 (Continuité des fonctions usuelles)

Les fonctions usuelles :

1. fonction constante $x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
2. fonction identité $x \mapsto x$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
3. fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$,
4. fonction puissance entière $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n \leq 0$,,
5. fonction racine $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n-ième définie $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ si n est pair, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ si n est impair,
6. puissance rationnelle $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ où p/q ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) est irréductible définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$
7. fonction homographique définie par $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{d}{c}\}$
8. fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$
9. fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$,
10. fonctions circulaires définies sur $\mathbb{R}$ pour sinus et cosinus, et $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2}\}$ pour tangente,
11. fonction hyperboliques définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

sont continues sur leur ensemble de définition.

5.3 Théorèmes sur la continuité

Nous introduisons dans cette section les théorèmes fondamentaux sur la continuité auxquels vous ne pourrez pas échapper. Ils forment la base de la connaissance de l'analyse pour les semestres suivants.

Commençons par l'un des théorème intuitivement facile à énoncer.

Théorème 1 (Théorème de Bolzano)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont tels que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque *Noter que si $f(a)$ (ou $f(b)$) est nul, alors automatiquement il existe au-moins c tel que $f(c) = 0$, puisque $c = f(a)$ (ou $f(b)$).*

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels de I. Alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par la fonction f.
En d'autres termes, pour tout a et b réels de I tels que $a < b$,

$$\text{si } k \in]f(a), f(b)[\text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = k.$$

Remarque *Ce théorème permet de dire que l'image d'un intervalle est un intervalle.*

Théorème 3 (Théorème de Weierstrass (bornes atteintes))

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ de I intervalle de $\mathbb{R}$ (autrement dit sur un intervalle fermé et bornée de I). Alors il existe deux réels c_1 et c_2 dans $[a, b]$ tels que pour tout x dans $[a, b]$,

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

Remarque *Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle fermé borné, alors f est aussi bornée et atteint des bornes.*

Remarque *Une conséquence de ce théorème est la proposition suivante :*
pour tous réels a et b avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un segment.

5.4 Continuité, monotonie, injectivité et bijectivité

Proposition 2 (Continuité et monotonie)

Si f est une fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ (l'image par f de I) soit également un intervalle, alors f est continue.

Remarque *Attention, il faut que la fonction soit monotone pour avoir le résultat. En général, si l'image par une fonction f d'un intervalle est un intervalle, alors f n'est pas forcément continue.*

Exemple *Si l'on considère la fonction suivante*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} \sin(\dfrac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0, \\ k, & \text{si x} = 0, \end{cases} \end{array}$$

avec $k \in [-1, 1]$.
Alors f n'est pas continue en 0 et pourtant pour tout intervalle I contenant 0, on a $f(I) = [-1, 1]$.

Proposition 3 (Monotonie et injectivité)

Soit f une fonction définie (pas forcément continue) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f est strictement monotone. Alors f est injective.

Pour avoir la réciproque, nous sommes obligés de supposer la continuité de f, sinon cela ne marche pas.

Proposition 4 (Continuité et injectivité)

Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est injective et continue sur I alors elle est nécessairement strictement monotone.

Remarque *Attention, une fonction injective et non continue n'est pas forcément monotone. On peut par exemple considérer une fonction continue par morceaux donc chaque morceau est soit strictement croissant soit strictement décroissant.*

Théorème 4 (Continuité et bijectivité)

Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est injective et continue sur I et si on pose $J = f(I)$ (l'image de I par f), et si l'on considère la fonction g :

$$\begin{array}{rccl} g: & I & \rightarrow & J \\ & x & \mapsto & g(x) := f(x), \end{array}$$

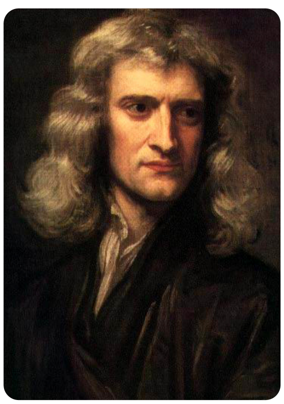
alors la fonction g est bijective et sa fonction réciproque g^{-1} est continue.

Remarque

1. *Les hypothèses du théorème précédent signifient que la fonction g permet de restreindre l'ensemble d'arrivée I de la fonction f injective et continue à son image $J = f(I)$ de telle sorte que g soit, par construction à la fois injective et surjective donc bijective.*
2. *Comme d'après la proposition précédente (continuité et injectivité) la fonction f est strictement monotone, alors sa fonction réciproque est aussi strictement monotone, et de même sens de variation que f.*

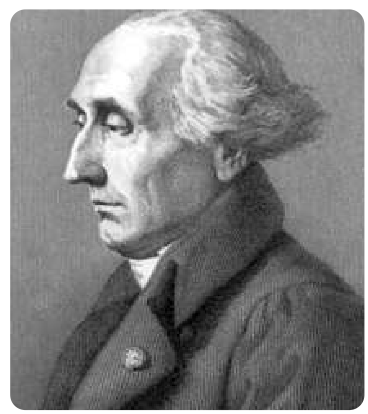
Chapitre 6

Dérivée d'une fonction



(a) Sir Isaac Newton (1642–1727), Newton partage avec Gottfried Wilhelm Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Dans l'histoire du calcul infinitésimal, le procès de Newton contre Leibniz est resté célèbre. Newton et Leibniz avaient trouvé l'art de lever les indéterminations dans le calcul des tangentes ou dérivées.

(b) Guillaume François Antoine de L'Hôpital, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieux (1661 -1704), mathématicien français à qui l'on doit la règle qui porte son nom .



(c) Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813), mathématicien, on lui doit entre autres choses la notation f' pour désigner la dérivée d'une fonction.

FIGURE 6.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la dérivabilité des fonctions. Noter que Cauchy et Weierstrass ont joué un rôle très important dans cette étude, leur photo se trouvant dans des chapitres précédents, il a semblé plus judicieux de montrer d'autres protagonistes qui ont contribué à l'élaboration de cette théorie.

Ce chapitre se trouve dans la suite logique des chapitres précédents. Ainsi, après avoir défini les fonctions, étudié leurs limites et leur continuité, nous pouvons désormais nous intéresser à un aspect important de la théorie de l'analyse : les dérivées. Le développement à la fois de la théorie et des applications dans ce domaine précis s'est énormément développé depuis sa création "officielle"

au $XVII$ème siècle par Leibniz et Newton.
Nous verrons dans ce chapitre quelques définitions qui seront nouvelles pour les étudiants mais également des résultats connus ainsi que des théorèmes fondamentaux qui serviront tout au long de leur cursus.

6.1 Définition de la dérivabilité de f

Avec les définitions des limites, nous avons désormais toutes les cartes en main pour définir la notion de dérivée d'une fonction.

Définition 1 (Dérivée en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On dit que f est dérivable en a si la fonction suivante (appelée taux d'accroissement),

$$g: \begin{array}{ccc} I-\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, \end{array}$$

possède une limite finie l au point a.
Dans ce cas là, on note la limite l de la façon suivante :

$$l = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Ce nombre $f'(a)$ est appelé dérivée de f en a.

Définition 2 (Dérivée sur à droite et à gauche)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I (ou bien une extrémité de I).

1. On dit que f est dérivable à droite en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à droite quand x tend vers a (supérieurement).

2. On dit que f est dérivable à gauche en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à gauche quand x tend vers a (inférieurement).

Définition 3 (Dérivée sur I)

On dit que f est dérivable sur I si, pour tout x de I, f est dérivable en x. Et note f' : $x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée.

Remarque *On peut définir la dérivée d'une fonction f en un point a d'une autre façon. Si l'on considère la fonction ε_a définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon_a : & \mathscr{D}_f \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varepsilon_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a). \end{array}$$

Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et l'on peut écrire

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_a(x).$$

Interprétation graphique de la dérivée (voir cours en classe).

Remarque *Grâce à ce qui précède il est alors possible d'en déduire une équation de la tangente au graphe de f en a par :*

$$y = (x-a)f'(a) + f(a).$$

6.2 Dérivabilité et continuité

D'après la remarque de la fin de la section précédente on peut en déduire le premier résultat.

Proposition 1 (dérivée et continuité)

Si f est dérivable en un point a, alors elle est continue en ce point a.
On peut également remarquer que si f est dérivable la fonction ε est également continue en a.

Remarque *Attention : la réciproque de cette proposition est fausse en général !*
Considérer par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en 0.

Nous pouvons également donner la proposition suivante qui caractérise les fonctions dérivables en a.

Proposition 2 (caractérisation de la dérivée)

Une fonction f définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ est dérivable en un point a si et seulement s'il existe un nombre réel l et une fonction ε_a qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_a \text{ est continue en } a \text{ et } \varepsilon_a(a) = 0 \\ f(x) = f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon_a(x) \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$$

Dans ce cas le nombre l est exactement la dérivée $f'(a)$ de f en a.

6.3 Dérivabilité, opérations algébriques et composition

Proposition 3 (dérivée opérations algébriques)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I.

1. Si f et g sont dérivables en a, la fonction $f+g$ est dérivable en a et on a
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. Si f et g sont dérivables en a, la fonction fg est dérivable en a et on a
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Si f et g sont dérivables en a, avec $g(a) \neq 0$ la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Proposition 4 (dérivée d'une fonction composée)

Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans J, et g une fonction définie sur J à valeurs dans K (I, J et K étant des intervalles de $\mathbb{R}$).
Si f est dérivable en a, un élément de I, et si g est dérivable en $f(a)$ un élément de J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Remarque *Lorsqu'on dérive des fonctions composées on peut faire une analogie avec des poupées russes. Les fonctions dans la composition s'emboîtent les unes dans les autres. Et lorsque l'on dérive cette composition de fonctions, cela revient à enlever les poupées les unes après les autres. Et chaque fois qu'on en retire une on la dérive au point correspondant à l'intérieur des poupées encore rangées que l'on n'a pas encore touchées.*

Une des conséquences de la proposition précédente est la dérivée de la réciproque d'une fonction.

Proposition 5 (dérivée d'une fonction réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Proposition 6 (dérivée d'une fonction réciproque sur I)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Soit $f^{-1} : J \to J$ sa fonction réciproque. On suppose que f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

6.4 Dérivée et monotonie

Proposition 7 (dérivée d'une fonction constante)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée f' est identiquement nulle sur I.

Proposition 8 (dérivée et monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors

1. f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I.
2. f est décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I.
3. f est strictement croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.
4. f est strictement décroissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est négative ou nulle sur I mais ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point.

6.5 Dérivées et extrema

Rappelons les résultats suivants sur le maximum et le minimum d'une fonction.

Proposition 9 (Maximum et minimum d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I. On dit que :

1. la fonction f admet un maximum en c si pour tout x de I,
$$f(x) \leq f(c),$$
2. la fonction f admet un minimum en c si pour tout x de I,
$$f(x) \geq f(c),$$
3. la fonction f admet un extremum en c si elle admet un maximum ou un minimum en c.

Proposition 10 (Maximum et minimum locaux)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I. On dit que :

1. la fonction f admet un maximum local en c s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert de la forme $[c-\eta, c+\eta]$ soit inclus dans I et la restriction de f à cet intervalle admette un maximum en c, soit encore : il existe $\eta > 0$ tel que
$$\text{si pour tout } x \in I,\ |x-c| \leq \eta \text{ alors } f(x) \leq f(c),$$
2. la fonction f admet un minimum local en c s'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'intervalle ouvert de la forme $[c-\eta, c+\eta]$ soit inclus dans I et la restriction de f à cet intervalle admette un minimum en c, soit encore : il existe $\eta > 0$ tel que
$$\text{si pour tout } x \in I,\ |x-c| \leq \eta \text{ alors } f(x) \geq f(c),$$
3. la fonction f admet un extremum local en c si elle admet un maximum ou un minimum local en c.

Proposition 11 (Dérivée et extrema locaux- Théorème de Fermat)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$. Soit c un point de I . Si f est dérivable c et admet un extremum local en ce point alors
$$f'(c) = 0.$$

Remarque

1. *Attention cela ne marche dans le cadre général que si I est un ouvert (autrement on ne prend pas les bords de l'intervalle I en compte) !*
2. *Attention la réciproque de cette proposition est fausse en général !*

6.6 Théorèmes fondamentaux sur les dérivées

Nous en arrivons aux théorèmes fondamentaux. Ces théorèmes comme leur nom l'indique sont essentiels pour la suite du cours d'analyse. Ils seront utilisés souvent dans les preuves de propositions ou théorèmes ainsi que dans la résolution d'une grande variété d'exercices.

Théorème 1 (Théorème de Rolle)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors si $f(a) = f(b)$, il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Remarque *Attention, si jamais f n'est pas dérivable sur l'intervalle, il se peut que la fonction possède un extremum sans qu'une seule valeur de la dérivée de f (là où f est dérivable) s'annule.*

FIGURE 6.2 – Michel Rolle, (1652 - 1719), mathématicien français ; a formulé une première version du théorème qui porte son nom en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable. On lui doit au passage la notation normalisée : $\sqrt[n]{x}$ pour désigner la racine n-ième d'un réel x.

Théorème 2 (Théorème des accroissements finis ou théorème de Lagrange)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Théorème 3 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$, dérivables sur l'intervalle $]a, b[$.
Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

Proposition 12 (Prolongement en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ (où a est un élément de I).
On suppose que sa dérivée f' admet une limite réelle l au point a. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque *Attention : la dérivée d'une fonction f n'a pas toujours pour limite $f'(a)$ au point a. Ce qui signifie que la dérivée d'une fonction dérivable n'a pas de raison d'être continue.*

Exemple
La fonction suivante est un exemple classique de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue.

$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est dérivable en 0 mais n'est pas continue en ce point puisque que sa dérivée n'admet pas de limité en 0.

Proposition 13 (Règle de l'Hôpital)

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que g et g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$, alors :

1. (version 1) si $f(a) = g(a) = 0$, on a le résultat suivant :
$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
2. (version 2) si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, on a le résultat suivant :
$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Remarque

1. *Dans la proposition précédente, la limite l peut être finie ou infinie.*
2. *La règle de l'Hôpital n'est à utiliser qu'en cas d'indétermination de la forme "$\frac{0}{0}$" pour la version 1 ou "$\frac{\infty}{\infty}$" pour la version 2.*
3. *On peut utiliser la règle de l'Hôpital en dérivant plusieurs fois (sous réserve que les dérivées successives existent).*
4. *Ces deux versions ne donnent que des conditions suffisantes pour avoir la limite. C'est à dire que la réciproque est fausse. Il se peut que la limite du quotient des dérivées n'existe pas alors que la limite du quotient. existe.*
Un exemple illustrant le dernier point de la remarque est donné par le calcul de
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x))}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0,$$
tandis que
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{1},$$
ne possède pas de limite en 0.

6.7 Dérivées des fonctions usuelles

Commençons par donner les dérivées qui sont supposées être connues depuis le Lycée et donc, supposées être parfaitement maîtrisées non seulement par leurs formulation mais également leur domaine de définition.

Propriété 1 (Dérivée des fonctions puissance)

La dérivée des fonctions puissance est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	a ($a \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\mathbb{R}_+^*$	x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$

Viennent ensuite les dérivées qui sont nouvelles cette année. Leurs valeurs sont importantes à connaître, surtout lorsque l'on abordera le chapitre sur les équations différentielles avec les dérivées mais également les primitives des fonctions usuelles à connaître. Encore une fois, les ensembles de définitions sont aussi important que les formulations des dérivées.

Propriété 2 (Dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique)

La dérivée des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}$	a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}^2(x)$
$\mathbb{R}^*$	$\text{coth}(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{\text{sh}(x)^2} = 1 - \text{coth}^2(x)$
$\mathbb{R}$	$\text{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$[1, \infty[$	$\text{argch}(x)$	$]1, \infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$]-1, 1[$	$\text{argth}(x)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

Propriété 3 (Dérivée des fonctions trigonométriques)

La dérivée des fonctions trigonométriques est donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_{f'}$	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$	cotan(x)	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$	$\dfrac{-1}{\sin^2(x)}=-1-\text{cotan}^2(x)$
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1,1]$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

6.8 Dérivées successives

6.8.1 Dérivée $n^{ième}$

Définition 4 (Fonction dérivable plusieurs fois)

1. Etant donnés un entier n non nul, et une fonction f définie et dérivable n fois sur I, la dérivée $n^{ième}$ est définie comme de la façon suivante :
$$f^{(n)}=(f^{(n-1)})',$$
avec pour convention $f^{(0)}=f$.
2. si f admet une dérivée $n^{ième}$, avec $n\in\mathbb{N}$, on dit que f est n fois dérivable sur I.
3. si pour tout $n\in\mathbb{N}$ la dérivée $n^{ième}$ de f existe, on dit que f est indéfiniment dérivable.

6.8.2 Classes de fonction

6.8.3 Fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$

Définition 5 (classe $\mathscr{C}^n$)

Soit n un entier non nul. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et sa dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}$ est continue sur I.
Si $n = 0$ on dit juste que f est continue (de classe $\mathscr{C}^0$ sans être nécessairement dérivable.

6.8.4 Fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

Définition 6 (classe $\mathscr{C}^\infty$)

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si pour tout entier naturel n, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

6.8.5 Dérivée $n^{ième}$ d'une somme de fonctions

Proposition 14 (Dérivée $n^{ième}$ d'une somme)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.
On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors :

1. la somme $f + g$ est également n fois dérivable et $(f + g)^n = f^n + g^n$,
2. si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est également n fois dérivable et $(\lambda f)^n = \lambda f^n$.

6.8.6 Dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions

La dérivée $n^{ième}$ d'un produit de fonctions est un peu plus compliqué. Elle porte un nom : c'est la formule de Leibniz.

Proposition 15 (Formule de Leibniz)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I. Alors la fonction produit fg est également n fois dérivable sur I et

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}.$$

où, pour tout entier $k = 0, ..., n$, C_n^k que l'on écrit également $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre défini par :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Et par convention, ce coefficient est nul si $k > n$.

Remarque *Si l'on considère une fonction g qui ne s'annule pas sur I on peut définir la dérivée $n^{ième}$ d'un quotient de fonctions $\frac{f}{g}$ en reprenant la formule précédente mais en multipliant f par $\frac{1}{g}$ au lieu de g.*

6.8.7 Dérivée $n^{ième}$ de la composée de deux fonctions.

Contrairement à la formule de Liebniz qui doit être connue par coeur, celle de Faà di Bruno n'est donnée ici qu'à titre indicatif (elle n'est pas au programme). Elle permet de voir qu'ils est possible de calculer la dérivée $n^{ième}$ de la composée de deux fonctions, mais la formulation reste quand même bien compliquée.

Proposition 16 (Formule de Faà di Bruno)

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$, et n un entier naturel. On suppose que f est n fois dérivable sur I et g est n fois dérivable J . Alors la fonction composée $g \circ f$ est également n fois dérivable sur I et

$$(g \circ f)^n = n! \sum \frac{m!}{b_1!b_2!...b_m!} g^k \circ f \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{(b_1)} \left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{(b_2)} ... \left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{(b_m)}$$

où, la somme est sur toutes les différentes solutions entiers naturels b_1, b_2, ...,b_m de l'équation

$$b_1 + 2b_2 + ... + mb_m,$$

et $k := b_1 + b_2 + ... + b_m$

6.9 Fonctions convexes

Les fonctions convexes sont très utiles dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées et notamment dans le domaine de l'optimisation. Nous verrons d'ailleurs dans cette section comment elles sont reliées aux extrema.
Commençons par donner d'abord une définition de ces fonctions.

Définition 7 (Fonction convexe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tous x et y dans I

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

pour tout $t \in [0, 1]$.
La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.

On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 17 (Convexité et segment)

La fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tous a et b dans I avec $a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 18 (Convexité et dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si sa dérivée f' est croissante alors f est convexe et pour tous $x, a \in I$

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Corollaire 1 (Convexité et dérivée seconde)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur I. Si sa dérivée seconde f'' est telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est convexe sur I.

Nous pouvons désormais donner quelques résultats reliant la convexité avec les extrema. Mais auparavant, rappelons un résultat reliant les extrema avec les dérivées et dérivées secondes d'une fonctions.Nous nous focaliserons sur les minima (les résultats sur les maxima sont analogues en considérant $-f$ plutôt que f).

Proposition 19 (Dérivée et minimum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$.

1. Si a est un minimum local alors $f'(a) = 0$.
2. Si de plus, f est deux fois dérivables en a, alors $f''(a) \geq 0$

"Inversement"
Si $b \in I$ est tel que $f'(b) = 0$ et si $f''(b) > 0$ alors b est un minimum local strict (avec les inégalités strictes) de f.

Remarque *Attention :*

1. *les conditions $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$ ne sont pas suffisantes (sauf si f est convexe).*
   Exemple : $f : x \mapsto x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un minimum local.
2. *D'autre part, la condition $f''(a) > 0$ n'est pas nécessaire.*
   Exemple : $f : x \mapsto x^4$ est telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et pourtant 0 est bien minimum de f.

Proposition 20 (Convexité et minimum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable sur I. Soit $a \in I$. On a alors

$$f'(a) = 0 \text{ est équivalent à } a \text{ minimum de } f \text{ sur } I.$$

Chapitre 7

Les suites

(a) Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), mathématicien français, qui a établit entre autres chose un critère de convergence des suites qui porte son nom.

(b) Leonardo Fibonacci ($\simeq$ 1175 - $\simeq$ 1250), un mathématicien italien également appelé Léonard de Pise, est connu pour la suite qui porte son nom et qu'il a introduite dans le Liber Abaci (Le livre des calculs) en 1202.

(c) Blaise Pascal (1623- 1662), mathématicien français, décrivit dans le "traité du triangle arithmétique" en 1654 ce qui allait le raisonnement par récurrence comme on l'entend de nos jours.

FIGURE 7.1 – Quelques mathématiciens célèbres ayant contribué à l'élaboration et l'étude de la théorie sur les suites.

Un cas particulier de fonctions, est les suites. C'est un cas particulier dans le sens où l'ensemble de départ n'est pas réel mais dans les entiers naturels.
Ce chapitre est dédié à l'étude des suites numériques qui seront à valeurs dans les réels. Certains résultats seront valables pour les complexes mais nous resterons ici dans les réels.

7.1 Définition

Définition 1 (Suites réelles)

On appelle **suite** réelle toute **application**

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}\right. .$$

On note une telle application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le nombre u_n est appelé terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque *On appellera aussi suite les applications dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.*

On peut définir les suites de deux façons différentes.

1. Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = f(n),$$
c'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.
2. Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :
$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 = a. \end{array}\right.$$

c'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

7.2 Deux suites classiques

Il existe deux suites classiques que l'on rencontrera assez souvent. Les suites arithmétiques et les suites géométriques.

7.2.1 Suites arithmétiques

Définition 2 (Suite arithmétique)

On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = a + u_n.$$

7.2.2 Suites géométrique

Définition 3 (Suite géométrique)

On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = ru_n.$$

Il est possible de donner la formulation explicite de chacune de ces suites grâce à la proposition suivante.

Proposition 1 (Formulation explicite suites arithmétiques et géométriques)

1. Le terme général d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 est
$$u_n = u_0 + na.$$
2. Le terme général d'une suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 est
$$u_n = u_0 r^n.$$

7.3 Récurrence d'ordre 2

Il se peut que l'on définisse les suites par une récurrence d'ordre supérieure à 1 comme formulée dans la section précédente. Un cas particulier que l'on va étudier est la récurrence d'ordre 2 (dans le cas le plus simple, le cas linéaire).

Définition 4 (Récurrence d'ordre 2)

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formulation récurrente linéaire d'ordre 2 s'écrit de la façon suivante

$$\begin{cases} u_{n+1} = bu_n + cu_{n-1} \\ u_0 = a_0, \quad u_1 = a_1, \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où a et b sont des réels donnés.

Remarque *Si $b = c = 1$, si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ on définit alors la suite de Fibonacci.*

Pour calculer explicitement le terme général de toute suite définie par des récurrences linéaires d'ordre 2, l'idée est de chercher des suites géométriques de raison r satisfaisant cette récurrence. La raison vérifie alors l'équation caractéristique

$$r^2 - br - c = 0.$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2 (Formulation explicite suites récurrentes d'ordre 2)

1. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n,$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.
2. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 1 solution réelle $r_0 \neq 0$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n,$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.
3. Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme
$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos(n\theta) + \lambda_2 \rho^n \sin(n\theta),$$
avec λ_1 et λ_2 deux réels.

7.4 Limite de suites

7.4.1 Introduction

Définition 5 (Limite finie d'une suite)

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \geq N \text{ alors } |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on dit que la suite est convergente (on dit aussi qu'elle converge vers l).
S'il n'existe pas de $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite est divergente.
Et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Remarque *On a les équivalences suivantes*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

Proposition 3 (Unicité de la limite)

La limite $l \in \mathbb{R}$ d'une suite réelle, si elle existe est unique.

Définition 6 (Limite infinie d'une suite)

1. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \geq M.$$
2. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ si et seulement si pour tout $M < 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n \leq M.$$

Proposition 4 (Suite majorée et minorée à partir d'un certain rang)

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie, et

1. s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n < M,$$
(on dit que la suite est majorée par M à partir d'un certain rang) alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $-\infty$ soit $l \in]-\infty, M]$.
2. s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\text{si } n \geq N \text{ alors } u_n > M,$$
(on dit que la suite est minorée par M à partir d'un certain rang) alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit $+\infty$ soit $l \in [M, +\infty[$.

Remarque *Il est important de remarquer ici que dans le cas la limite finie, une inégalité stricte sur le terme général de la suite entraîne seulement une inégalité large sur la limite !*

Définition 7 (Suite majorée, minorée et bornée)

1. On dit qu'une suite est majorée si et seulement s' il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On dit qu'une suite est minorée si et seulement s' il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Propriété 1 (Convergence et suite bornée)

Toute suite convergente est une suite bornée.

Remarque *Attention, la réciproque de la propriété précédente est fausse !*

Remarque *Pour que tout soit bien clair, il paraît nécessaire de faire le point sur un peu de vocabulaire : en effet, il ne faut pas confondre suite convergente et suite qui admet une limite. Nous allons le décrire dans le tableau qui suit.*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge*	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*diverge*	
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite finie* l	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet l'*∞ *comme limite*	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite*
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite finie ou infinie*		
convergence	*divergence de première espèce*	*divergence de deuxième espèce*

7.4.2 Opération algébriques sur les limites

A l'instar de ce qui a été dit sur les limites de fonctions, les résultats d'opérations sur les limites de suites sont analogues.

Limite d'une somme de suites

Propriété 2 (Limite de somme)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite de la somme des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
l_1	l_2	l_1+l_2
l_1	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Limite d'un produit de suites

Propriété 3 (Limite de produit)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite du produit des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n$
l_1	l_2	l_1l_2
l_1	∞	∞
∞	∞	∞
0	0	0
0	∞	**Forme indéterminée**

Limite d'un quotient de suites

Propriété 4 (Limite de quotient)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies ayant pour limites respectives l_1 et l_2. Alors la limite du quotient des suites est résumé sous forme de tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$
l_1	$l_2(\neq 0)$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	0
l_1	0	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	**Forme indéterminée**
0	0	**Forme indéterminée**

7.4.3 Résultats sur les limites de suites

Toujours de façon analogue aux résultats sur les fonctions, nous avons des résultats sur les comparaisons de suites, ainsi que le théorème des gendarmes pour les suites.

Proposition 5 (Comparaison suites et limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$u_n \leq v_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$v_n \leq u_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Proposition 6 (Limite positive)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergence telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \geq 0$.

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ (finie ou infinie) et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$u_n \leq v_n \leq w_n,$$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Nous avons également le résultat suivant qui pourra s'avérer très utile pour certaines preuves dans les exercices rencontrés.

Proposition 7 (Recollement)

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}$$
ont même limite l (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l.

Remarque *Il est important de faire attention dans cet énoncé au fait que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient la même limite. Si ce n'est pas le cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

7.5 Suites réelles et monotonie

Définition 8 (Suite croissante, décroissante)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \leq u_{n+1},$$
2. décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \geq u_{n+1},$$
3. monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 8 (Limite et monotonie)

Toute suite monotone admet une limite. De façon plus précise :

1. toute suite croissante non majorée admet pour limite $+\infty$,
2. toute suite croissante et majorée admet une limite finie,
3. toute suite décroissante et non minorée admet pour limite $-\infty$,
4. toute suite décroissante et minorée admet une limite finie.

7.6 Suites adjacentes

Définition 9 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit qu'elles sont **adjacentes** si et seulement si

1. l'une des suites est croissante,
2. l'autre suite est décroissante,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Propriété 5 (Limites et suites adjacentes)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante alors :

1. pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $u_n \leq v_m$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent, sont finies et sont égales.

7.7 Suites extraites

Définition 10 (Suites extraites)

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante,}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété 6 (Propriété de φ)

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(n) \geq n.$$

En particulier, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} := \varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous-suite convergente.

7.8 Critère de Cauchy

Il se peut que l'on ait besoin de montrer qu'une suite est convergente sans nécessairement calculer explicitement sa limite. C'est le cas par exemple quand cette limite est difficile à trouver. Il existe alors un critère qui marche bien pour les suites réelles. C'est le critère de Cauchy. Avant de le définir, commençons par introduire les suites de Cauchy.

Définition 11 (Suites de Cauchy)

Un suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p et $q \in \mathbb{N}$, si $p, q \geq N$ alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

Proposition 9 (Suite de Cauchy bornée)

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 10 (Suite de Cauchy et convergence)

Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Remarque *Attention : même si toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque (toute suite de Cauchy est convergente) n'est pas vraie dans n'importe quel ensemble. Ici, nous travaillons dans $\mathbb{R}$, et ça marche. Mais il faut absolument que l'on se trouve dans un ensemble "sans trou", que l'on appelle également ensemble complet. Par exemple, cela ne marcherait pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels qui n'est pas complet.*

7.9 Fonctions et suites

Proposition 11 (Suites et fonctions continues)

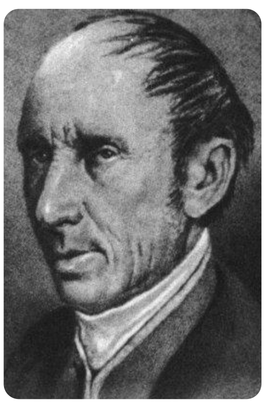
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telles que :

1. si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$,
2. f est continue en l,

alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

Chapitre 8

Equations différentielles



(a) Charles Émile Picard (1856-1941) , mathématicien français a, avec Painlevé et Poincaré modernisé l'analyse des équations différentielles.

(b) Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832- 1903), mathématicien allemand, les fonctions qui portent son nom sont très utiles pour l'existence et unicité des solutions d'équations différentielles.

(c) Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705), mathématicien suisse, frère de Jean Bernoulli, oncle de Daniel et Nicolas Bernoulli, proposa l'équation différentielle qui porte son nom qui fut résolue par Leibniz.

FIGURE 8.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des équations différentielles. Il y en a une multitudes, et certains comme Cauchy ont déjà été cité dans des chapitres précédents.

Après avoir appris à résoudre des équations du type $f(x) = 0$, où l'inconnu est le nombre x, les mathématiciens on dû élaborer des problèmes où ce n'était pas x mais la fonction f l'élément à trouver. Ces équations faisant intervenir des dérivées (et donc par définition des différences infinitésimales), on les a appelées naturellement équations différentielles. En général on gardera la notation x pour l'inconnue, mais cette fois-ci x sera une fonction qui dépendra dans la majorité des cas d'une variable t (pour permettre une analogie avec le temps et des applications en physique, chimie ou biologie).

Avant d'apprendre à les résoudre, nous allons d'abord apprendre à les classifier.

8.1 Equation simple

Nous allons commencer par étudier les équations les plus simples.

8.1.1 Equation $x' = 0$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(E_0) \quad x'(t) = 0, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Nous savons d'après le chapitre 6 que

$$x'(t) = 0 \text{ est équivalent à } x(t) = c, \text{ où } c \text{ est une constante réelle.}$$

Compliquons un peu les choses.

8.1.2 Equation $x' = ax(t)$

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(E_1) \quad x'(t) = ax(t), \quad \text{où } t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Ce type d'équation a trouvé une application très rapidement : voir modèle de Malthus.
L'idée pour la résoudre est intuitivement (pour l'instant) de tester la solution

$$t \mapsto x(t) = e^{at}.$$

Après vérification, on voit bien que cette fonction est solution de (E_1). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur I et vérifie (E_1).
Cherchons toutes les solutions de (E_1) maintenant.
Il existe plusieurs méthodes pour le montrer. Nous en choisissons une qui semble assez simple. Nous allons nous ramener à l'équation (E_0) dont on sait d'après la section précédente que les seules solutions sont les fonctions constantes. La méthode est la suivante : si l'on considère φ solution de (E_1) alors la fonction

$$\psi : t \mapsto \psi(t) = \varphi(t)e^{-at}, \quad t \in I.$$

Par le produit de fonction dérivable, ψ est dérivable sur I et un rapide calcul montre que

$$\psi'(t) = 0 \quad \text{pour } t \in I.$$

Autrement dit $\psi = c, \quad c \in \mathbb{R}$, et ce sont les mêmes solutions pour ψ. Ceci est valable pour toutes les solutions φ de (E_1). Par conséquent, toutes les solutions de (E_1) sont données grâce à ψ :

$$\varphi = \psi e^{at} = ce^{at}.$$

Réciproquement, si φ est de la forme $t \mapsto ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}$, alors φ est solution de (E_1).

Remarque *La constante réelle c sera déterminée par une condition, appelée condition initiale et que l'on notera en général*

$$\varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Proposition 1 (Existence et unicité des solutions de (E_1))

Soient a, t_0 et $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E_1) telle que $x(t_0) = \varphi_0$.

Nous venons donc de donner l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre 1 sous forme normale à coefficients constants avec une condition initiale.
Mais que veulent dire équations différentielles ordinaires, linéaire, ordre 1, homogène, sous forme normale ? Ce sont tous ces termes que nous allons définir dans la prochaine section.

8.2 Différents types d'équations

Définition 1 (Equation différentielle ordinaire)

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées x', x'',...,$x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x'', ..., x^{(n)}) = 0, \tag{8.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).
La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Equation différentielle normale)

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x'', ..., x^{(n-1)}). \tag{8.2}$$

8.3 Equation linéaire

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 3 (Equation différentielle linéaire)

Une EDO de type (8.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n_1}(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \quad (8.3)$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

Exemple
Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre (on justifiera la réponse) :

$$i.\ (x-t)dt + 4tdx = 0 \quad ii.\ x'' - 2x' + x = 0 \quad iii.\ \frac{d^3x}{dt^3} + t\frac{dx}{dt} - 5x = e^t$$

$$iv.\ (1-x)x' + 2x = e^t \quad v.\ \frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0 \quad vi.\ \frac{d^4x}{dt^4} + x^2 = 0$$

8.4 Solutions

Définition 4 (Solution)

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.
On notera en général cette solution (x, I).
Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).
Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

8.5 Equations différentielles linéaire d'ordre 1

8.5.1 Définition

Définition 5 (Equation linéaire d'ordre 1)

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue x et par rapport à sa dérivée x'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)x' + b(t)x = d(t). \tag{8.4}$$

Dans toute la suite, on supposera que a, b et d sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

8.5.2 Primitives

Afin de résoudre les équations différentielles, il faut que l'on se replonge dans les notions de primitives et d'intégrales que nous ne développerons pas beaucoup ici. Nous resterons principalement sur les acquis de terminal. Le cours sur les intégrales étant développé dans les semestres suivants. On admettra que toute fonction f continue sur $I \subset \mathbb{R}$ peut s'exprimer comme la dérivée d'une fonction dérivable sur I. On dira ainsi que f admet une primitive.

Définition 6 (Primitive)

Une fonction $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

1. F est dérivable, et
2. $F' = f$.

On note souvent $F(t) = \displaystyle\int f(t)dt$.

Proposition 2 (Primitives d'une fonction)

Soit f une fonction continue admettant plusieurs primitives sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient F et G deux primitives de f sur I. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $F(t) - G(t) = c$.

Proposition 3 (unicité de la primitive d'une fonction)

Soient f une fonction continue admettant plusieurs primitives sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(t_0) = y_0$.

Proposition 4 (Primitives d'une fonction)

Soit f une fonction continue admettant plusieurs primitives sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient F et G deux primitives de f sur I. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $F(t) - G(t) = c$.

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient f une fonction continue admettant plusieurs primitives sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$. La fonction F définie sur I

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

est l'unique primitive de f s'annulant en t_0.

Remarque *Si de plus f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on a pour tout $t_0 \in I$*

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t} f'(s)ds.$$

Corollaire 1 (Intégrale)

Soient f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une primitive de f sur I. Soient $a, b \in I$ alors

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Pour calculer les primitives des fonctions usuelles on se réfère au tableau du chapitre 6.

Commençons par donner les primitives qui sont supposées être connues depuis le Lycée et donc, supposées être parfaitement maîtrisées non seulement par leurs formulation mais également leur domaine de définition.

Propriété 1 (Primitives des fonctions puissance)

Les primitives des fonctions puissance sont donnée sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_F$	Primitives F
$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	$c\ \ (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$a\ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$at + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	t	$\mathbb{R}$	$\frac{t^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	t^2	$\mathbb{R}$	$\frac{t^3}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{t}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$t^n\ (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{t}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{t^{3/2}}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{t}\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{nx^{(n+1)/n}}{n1} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}_+^*$	$t^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(t)$	$\mathbb{R}_+^*$	$t\ln(t) - t + c \ \ (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Viennent ensuite les primitives qui sont nouvelles cette année. Encore une fois, les ensembles de définitions sont aussi important que les formulations des primitives.

Propriété 2 (Primitives des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique)

Les primitives des fonctions logarithme, exponentielle et hyperbolique sont données sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_F$	Primitives F
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(t)$	$\mathbb{R}_+^*$	$t\ln(t) - t + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	e^t	$\mathbb{R}$	$e^t + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$a^t \ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{a^t}{\ln(a)} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\text{sh}(t)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\text{ch}(t)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\text{th}(t)$	$\mathbb{R}$	$\ln(cosh(t)) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}^*$	$\text{coth}(t)$	$\mathbb{R}^*$	$ln(\lvert\text{sh}(t)\rvert) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\text{argsh}(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$[1, \infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$	$]1, \infty[$	$\text{argch}(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{1-t^2}$	$]-1, 1[$	$\text{argth}(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Propriété 3 (Primitives des fonctions trigonométriques)

Les primitives des fonctions trigonométriques sont données sous forme de tableau :

$\mathscr{D}_f$	Fonction f	$\mathscr{D}_F$	Primitives F
$\mathbb{R}$	$\sin(t)$	$\mathbb{R}$	$\cos(t)+c$
$\mathbb{R}$	$\cos(t)$	$\mathbb{R}$	$\sin(t)+c$
$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\cos^2(t)}=1+\tan^2(t)$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$\tan(t)+c$
$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\dfrac{-1}{\sin^2(t)}=-1-\text{cotan}^2(t)$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$	$\text{cotan}(t)+c$
$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1,1[$	$\arcsin(t)+c$
$[-1,1]$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1,1[$	$\arccos(t)+c$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(t)+c$

Propriété 4 (Intégrtion par parties)

Soient u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on a alors la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt.$$

8.5.3 EDO linéaire sans second membre

Commençons par résoudre une équation linéaire d'ordre 1 sans second membre. On l'appelle équation linéaire du premier ordre homogène. C'est une équation de la forme

$$a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{8.5}$$

tel que $a(t)\neq 0$ pour tout $t\in I$.
Il est à noter que $x\equiv 0$ est une solution de l'équation linéaire homogène ci-dessus. On l'appelle solution triviale comme dans le cas des équations autonomes.

Proposition 5 (solution de l'équation différentielle linéaire homogène)

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène

$$a(t)x' + b(t)x = 0.$$

sur le domaine I, est donnée par la formule

$$x(t) = Ke^{F(t)},$$

avec $F(t) = \displaystyle\int (-\frac{b(t)}{a(t)})dt$ et $K \in \mathbb{R}$.
Si en plus il existe t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique solution définie pour tout $t \in I$ par

$$x(t) = x_0 e^{F(t)},$$

avec $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} (-\frac{b(s)}{a(s)})ds$ et $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$.

Proposition 6 (Solution triviale)

Si une solution de l'équation linéaire homogène s'annule en au-moins un point t_0 alors elle est identiquement nulle (solution triviale).

Remarque
La solution $x \equiv 0$ sur I est appelée solution dégénérée de l'équation linéaire homogène.

8.5.4 EDO linéaire avec second membre

Considérons l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur l'intervalle I où a ne s'annule pas.

Proposition 7 (Solution générale)

L'ensemble des solutions de l'équation

$$a(t)x' + b(t)x = d(t),$$

sur I est donné par la formule

$$x(t) = \left(K + \frac{d(t)}{a(t)}e^{-F(t)}dt\right)e^{F(t)}$$

où $K \in \mathbb{R}$ et $F(t) = \int(-\frac{b(t)}{a(t)})dt$.
Si en plus il existe t_0 dans I tel que $x(t_0) = x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique solution définie pour tout $t \in I$ par

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{d(s)}{a(s)} \exp\left(\int_{t_0}^{s} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}d\sigma\right) ds\right) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}ds\right).$$

Remarque
La méthode fréquemment utilisée pour trouver une solution de l'équation linéaire non homogène à partir de l'équation homogène est appelée méthode de variation de la constante.

8.5.5 Cas particulier

Proposition 8 (Formule de Duhamel)

Soient une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, α une constante réelle et $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = x_0$. La solution générale de l'équation scalaire

$$x' = \alpha x + f(t),$$

est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)ds,$$

où c est une constante.

8.5.6 Existence et unicité

Si l'on écrit l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la façon suivante :

$$x'(t) = a(t)x + b(t),$$

on a alors la proposition suivante.

Proposition 9 (Existence et unicité)

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$x'(t) = a(t)x + b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si de plus, on considère $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x(t_0) = x_0$, alors il existe une unique solution $x : I \to \mathbb{R}$ dérivable solution de cette équation différentielle linéaire et satisfaisant $x(t_0) = x_0$.
De plus la dérivée x' de cette solution est continue. On dit que la solution x est de classe $\mathscr{C}^1$.

8.6 Equations différentielles linéaire d'ordre 2

8.6.1 Définition

Définition 7 (Equation linéaire d'ordre 2)

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue x et par rapport à sa dérivée x'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t). \tag{8.6}$$

Dans toute la suite, on supposera que a, b, c et d sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Une solution x de cette équation doit être deux fois dérivable sur I

8.6.2 Equations différentielle homogène à coefficients constants

Considérons ici l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre à coefficients constants. Cette équation s'écrit

$$ax'' + bx' + cx = d,$$

avec deux conditions initiales en t_0

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } x'(t_0) = x_1.$$

Nous avons alors le résultat suivant

Proposition 10 (EDO ordre 2 coefficients constants)

Considérons l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

avec deux conditions initiales en t_0

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } x'(t_0) = x_1,$$

où a, b, c, d, x_0 et x_1 sont des réels.
Si l'on considère l'équation de second degré (appelée également équation caractéristique de l'équation différentielle)

$$ar^2 + br + c = 0,$$

, où r peut être complexe.
Si l'on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique, alors 3 cas se présentent :

1. si $\Delta > 0$,
   l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme :
   $$x(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2^{r_2 t}.$$
   où k_1 et k_2 sont des réels déterminés à partir des conditions initiales x_0 et x_1.
2. si $\Delta = 0$,
   l'équation caractéristique possède une seule solution réelle r_0, et les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme :
   $$x(t) = (k_1 t + k_2)e^{r_0 t}.$$
   où k_1 et k_2 sont des réels déterminés à partir des conditions initiales x_0 et x_1. si $\Delta < 0$,
   l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées r_1 et $r_2 = \overline{r_1} = \alpha + i\beta$ (où α est la partie réelle de r_1 et β sa partie imaginaire. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme :
   $$x(t) = e^{\alpha t}(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t),$$
   où k_1 et k_2 sont des réels déterminés à partir des conditions initiales x_0 et x_1.