Corrections suites réelles

Exercice 6-1 [Limites de suites]

a) Simplification par n, limite $\frac{1}{2}$.
b) Simplification par n^2, limite 0.
c) Simplification par n, limite $+\infty$.
d) Simplification par $\sqrt{n}$, limite 1.
e) Simplification par n, limite 1.
f) Utilisation du "conjugué", limite 0.
g) Exemple de suite sans limite (infinité de termes proches de n'importe quel angle).
i) Encadrement, limite 0.
j) Forme indéterminée méconnue, passage à l'exponentielle, utilisation de la limite entre $\ln(1+x)$ et x, limite e.
k) Simplification par n, encadrement, limite $\frac{1}{2}$.
m) La puissance c'est comme l'exponentielle, ça l'emporte, sur tous les monômes.

Exercice 6-2

1. $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + 3 - \frac{1}{2}a$.
2. $a = 6$
3. $v_n = 14(\frac{1}{2})^n$
4. La limite est 6.

Exercice 6-3 [Suites récurrentes]

a) La seule limite possible est 6. On montre que 6 est un majorant, puis que la suite est croissante.
b) Exemple de suite qui prend des valeurs très grandes, négatives, comme positives (sous suites paires et impaires).
c) La seule limite possible est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il faut alors montrer que la suite est minorée et décroissante. Celui là est assez pénible.
d) La seule limite possible est 4. Il suffit de montrer que 4 est un majorant et que la suite est croissante.
e) Ici deux limites possibles $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il suffit de montrer que $\frac{1}{3}$ est un majorant et que la suite est croissante.
f) Il suffit de calculer les premiers termes...la suite est cyclique.

Exercice 6-4

1. Il suffit de dériver.
2. $f([0,7]) = [\sqrt{2}, 3])$.
3. Seule limite possible 2 qui est un minorant et la suite est décroissante.

Exercice 6.5

1. On exprime v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Formule des suites géométriques.
3. $u_n = \dfrac{-2-2v_n}{v_n - 1}$
4. La limite est 2.

Exercice 6-6

1. On dérive.

2. $f([0, \sqrt{3}]) = [0, \frac{3}{2}]$. La seule limite possible est 1, mais suite non monotone.
3. Pour f^2 la seule limite possible est aussi 1, mais là on montre que les sous suites paires et impaires sont monotones. La limite est 1.

Exercice 6-7

1. Calcul direct.
2. Simple encadrement en utilisant les termes extrèmes.
3. Décomposition en blocs.

Exercice 6-8 $[\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}]$

La seule limite possible est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il suffit alors de montrer que cette valeur est un majorant, puis que la suite est croissante.

Exercice 6-9

Il suffit d'encadrer.

Exercice 6-10

1. C'est la somme des 2 autres limites.
2. Au moins une des 2 autres ne converge pas.
3. $u_n = 1/n - (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n$.

Exercice 6-11

1. $w_n = (u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 + \frac{3}{4}v_n^2$.
2. Immédiat

Exercice 6.12

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Définition de la notion de limite.
   (b) Minoration par une suite géométrique.
   (c) Immédiat.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Retour à la définition de la limite.
   (b) Majoration par une suite géométrique.

Exercice 6-13

1. Immédiat pour u_n, simple calcul pour v_n.
2. Les suites sont adjacentes, d'où le résultat.

Exercice 6-14

1. Simple récurrence.
2. Il suffit de regarder la fonction $f(x) = \sqrt{2x-1}$ pour $x > 1$.
3. La seule limite possible est 1.

Exercice 6-15

Tout terme impair est plus grand que le terme pair précédent, donc la suite converge.