

Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Cours de Calcul Différentiel

Très fortement inspiré d'une partie du cours de Sylvie Benzoni
- Calcul Différentiel Et Équations Différentielles -
Cours Et Exercices Corrigés- Editions Dunod

Table des matières

1	Préliminaires au calcul différentiel	5
1.1	Normes et espaces vectoriels normés	5
1.2	Applications continues	6
1.3	Applications linéaires continues	7
1.4	Applications multilinéaires continues	8
1.5	Séries dans un espace vectoriel normé	8
2	Différentielle d'une fonction	11
2.1	Différentiabilité	11
2.2	Quelques exemples importants	12
2.3	Opérations sur les différentielles	13
2.4	Dimension finie	15
2.4.1	Dérivées partielles	15
2.4.2	Matrice Jacobienne	16
2.4.3	Opérateurs différentiels classiques	17
3	Théorème des accroissements finis	19
3.1	Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles	19
3.2	Fonction d'une valeur sur un espace E et à valeurs réelles	19
3.3	Fonction d'une variable réelle	20
3.4	Théorème général	20
3.5	Quelques applications	21
4	Difféomorphismes	23
4.1	Introduction	23
4.2	Théorème d'inversion locale	23
4.3	Théorème des fonctions implicites	24
5	Différentielles d'ordre supérieur	27
5.1	Différentielles d'ordre 2	27
5.2	Exemples de différentielles d'ordre 2	28
5.3	En dimension finie	28
5.4	Différentielle d'ordre n	29

6	Formules de Taylor	31
6.1	Formule de Taylor avec reste intégral	31
6.1.1	Fonction d'une variable réelle à valeur réelle	31
6.1.2	Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach	31
6.1.3	Fonction d'un espace de Banach à valeur dans un espace de Banach	32
6.2	Formule de Taylor-Lagrange	33
6.2.1	Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach	33
6.2.2	Fonction d'une espace de Banach à valeur dans un espace de Banach	33
6.3	Formule de Taylor-Young	33
7	Extrema	35
7.1	Extrema libres	35
7.1.1	Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles	35
7.1.2	Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles	36
7.1.3	Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles	36
7.2	Extrema liés	37
7.2.1	Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles	37
7.2.2	Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles	37
7.3	Convexité et minima	38
8	Equations différentielles	41
8.1	Première définition	41
8.2	Résolution explicite	41
8.2.1	Equations linéaires scalaires d'ordre 1	41
8.2.2	Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants	42
8.2.3	Equations linéaires à coefficients constants	42
8.3	Lemme de Gronwall	43
8.3.1	Inéquations différentielle	43
8.3.2	Inéquations intégrales	44
8.4	Théorème de Cauchy-Lipschitz	44
8.5	Solutions maximales	44

Chapitre 1

Préliminaires au calcul différentiel

1.1 Normes et espaces vectoriels normés

On considère E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels munis respectivement de la norme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Bien souvent, ce seront des espaces de dimension **FINIE** de la forme $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, munis d'une norme quelconque

$$\|x\|_k = \left(\sum_{j=1}^{n \text{ (ou } p\text{)}} |x_j|^k \right)^{1/k} \text{ pour } x \in E \text{ (ou } F\text{) avec } k \in \mathbb{R}, 1 \leq k < \infty,$$

$$\text{ou bien } \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n \text{ (ou } p\text{)}} |x_j| \text{ pour } x \in E \text{ (ou } F\text{) avec } k = \infty.$$

La plupart du temps on considérera la norme euclidienne ($k = 2$) ou bien lorsque l'on sera dans le cas général et que les espaces E et F seront égaux, on notera simplement la norme $\|\cdot\|$.

Rappel 1 Norme. Nous rappelons qu'une norme sur un espace vectoriel est une **APPLICATION**

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

telle que

1. Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. Pour tout $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La donnée du couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle un espace vectoriel normé.

Rappel 2 Espace vectoriel normé. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Alors

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E ssi il existe $a \in E$, tel que $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
2. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E

$$\text{--ssi } \|x_p - x_q\| \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\text{--ssi pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tels que pour tous } p, q \geq N, \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon,$$

3. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E ssi il existe $M > 0$, $\|x_n\| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ATTENTION : on a toujours (1.) \Rightarrow (2.) \Rightarrow (3.) mais les réciproques sont **FAUSSES** en général.

Définition 1 Espace de Banach. On dit que E est un espace de Banach si toute suite de Cauchy de E converge dans E (autrement dit, on a (2.) \Rightarrow (1.) dans les espaces de Banach).

Exemple 1 Les espaces de Banach de référence sont

1. \mathbb{R}, \mathbb{R}^n et de manière générale tout espace vectoriel de dimension finie, ainsi que tout sous-espace fermé d'un espace de Banach.
2. $\mathcal{C}(X, E) = \{f : X \rightarrow E \text{ continue}\}$ muni de la norme uniforme (norme du sup) définie par
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

1.2 Applications continues

Définition 2 Application continue. Soit $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$. On dit que f est continue en $a \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in A$

$$\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Définition 3 Application k -lipschitzienne. On dit que $f : A \rightarrow F$ est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in A^2$, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

Remarque 1 On voit assez facilement que toute fonction lipschitzienne est continue sur son domaine de définition.

Propriété 1 Toute fonction construite à partir de fonctions continues par combinaison linéaire, multiplication, quotient (par exemple f/g mais alors il faut que le dénominateur ne soit pas nul) ou composition est encore continue.

1.3 Applications linéaires continues

Rappel 3 Application linéaire continue.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $u : E \rightarrow F$ linéaire, u est continue si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

On note $\mathcal{L}(E; F)$, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F , c'est un espace vectoriel normé. Et pour $u \in \mathcal{L}(E; F)$ on pose

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|u(x)\|, \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|, \\ &= \inf\{k > 0, \text{ pour tout } x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ceci définit une norme sur $\mathcal{L}(E; F)$. On peut prouver (pas fait ici) que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E; F)$ aussi.

Remarque 2 Deux méthodes utiles.

Soit $u : E \rightarrow E$ un application linéaire. Si on veut montrer que u est continue, on cherche $k > 0$, tel que $\|u(x)\| \leq k\|x\|$, pour tout $x \in E$. Grâce à la troisième égalité de ce qui précède on en déduit $\|u\| \leq k$.

Et si on sait que u est continue, grâce à la première égalité on déduit que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|$, et c'est la meilleure inégalité.

Par conséquent, on procède comme suit :

1. On majore $\|u(x)\|$ pour obtenir une inégalité du type $\|u(x)\| \leq k\|x\|$ valable pour tout $x \in E$.

Comme on l'a dit au-dessus, cela assure la continuité de u et le fait que $\|u\| \leq k$.

2. On espère que $\|u\| = k$. Reste donc à prouver que $\|u\| \geq k$.

a. On peut chercher, s'il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ (resp. $\|x_0\| \leq 1$) tel que $\frac{\|u(x_0)\|}{\|x_0\|} = k$ (resp. $\|u(x_0)\| = k$). Dans ce cas, grâce aux égalités (1.1) on en déduit que $\|u\| \geq k$.

b. Sinon, on cherche une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$, $x_n \neq 0$ (resp. $\|x_n\| \leq 1$) telle que

$$\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k \quad (\text{resp. } \|u(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k),$$

et on a donc avec les égalités (1.1), pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq \|u\| \quad (\text{resp. } \|u(x_n)\| \leq \|u\|).$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on en déduit facilement que $\|u\| \geq k$.

N.B. : la méthode *a.* ne marche pas toujours car un sup n'est pas forcément atteint. Par contre, la méthode *b.* marche toujours car un sup est toujours approché.

Remarque 3 Cas particulier important. Si la dimension de E est FINIE et si $u : E \rightarrow F$ est LINEAIRE, alors u est CONTINUE!

1.4 Applications multilinéaires continues

Pour simplifier, on se limitera au cas BILINEAIRE, mais le passage aux cas MULTILINEAIRE n'est pas difficile.

Définition 4 Application Bilineaire. Soit $\varphi : E \times F \rightarrow G$, où E, F et G sont des espaces vectoriels normés. On dit que φ est bilinéaire si pour tout $x \in E$, $\varphi(x, \cdot) : F \rightarrow G$ est linéaire et si pour tout $y \in F$, $\varphi(\cdot, y) : E \rightarrow G$ est également linéaire.

Nous avons alors le résultat suivant.

Rappel 4 Si φ est bilinéaire, nous avons les équivalences suivantes :

a. φ est continue

b. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, $\|\varphi(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \|\|\varphi\|\| &= \sup_{\substack{(x,y) \in E \times F \\ x,y \neq 0}} \frac{\|\varphi(x, y)\|}{\|x\|\|y\|}, \\ &= \inf\{k > 0, \text{ pour tout } x \in E, \text{ pour tout } y \in F, \|\varphi(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|\}. \end{aligned}$$

N.B. : Et donc, si φ est bilinéaire continue alors $\|\varphi(x, y)\| \leq \|\|\varphi\|\|\|x\|\|y\|$.

Remarque 4 Cas particulier important. Si les dimensions de E et F sont finies, alors toute application bilinéaire de $E \times F \rightarrow G$ est continue.

1.5 Séries dans un espace vectoriel normé

Rappel 5 Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

1. $\sum x_n$ converge dans E si et seulement si

$$\begin{aligned} &\text{--il existe } S \in E \text{ tel que } S_n = \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S \\ &\text{--ou encore il existe } S \in E \text{ tel que } \|S - \sum_{k=1}^n x_k\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

$$\text{On note alors } S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

2. Si E est une espace de Banach, on a alors

$$\sum x_n \text{ converge dans } E \Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy} \Leftrightarrow \left\| \sum_{k=p}^q x_k \right\| \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0.$$

3. On a les équivalences suivantes

$$\sum x_n \text{ converge normalement dans } E$$

$$\Leftrightarrow \sum \|x_n\| \text{ converge dans } \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } M \geq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq M.$$

4. Si E est un espace de Banach, on a l'implication suivante

$$\sum x_n \text{ converge normalement dans } E \Rightarrow \sum x_n \text{ converge dans } E.$$

Chapitre 2

Différentielle d'une fonction

2.1 Différentiabilité

Définition 5 *Fonction différentiable.* Soit $U \subset E$ un OUVERT non vide, et soit $f : U \rightarrow F$. On dit que la fonction f est différentiable en $a \in U$ si et seulement s'il existe une application LINEAIRE et CONTINUE $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x - a)\|_F}{\|x - a\|_E} = 0.$$

On peut aussi écrire, en posant $x - a = h$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0_E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(a + h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \quad (2.1)$$

L'application L est alors unique, elle est appelée différentielle de f en a et elle est notée df_a .

N.B : la démonstration de l'unicité est faite en cours.

Proposition 1 Une fonction $f : U \rightarrow F$ différentiable en un point $x \in U$ (au sens de la définition (2.1)) est NECESSAIREMENT continue au point x .

Preuve faite en cours.

Remarque 5 Par un argument analogue à la preuve de la proposition précédente, nous obtenons la continuité de L si l'on a celle de f .

Définition 6 On dit que la fonction f est DIFFERENTIABLE sur U si elle est différentiable en TOUT point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction

$$\begin{aligned} df & : U \rightarrow \mathcal{L}(E; F) \\ x & \mapsto df_x \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si de plus, df est continue on dit que f est **CONTINUÛMENT DIFFÉRENTIABLE**, ou de façon équivalente que f est de classe \mathcal{C}^1 .

ATTENTION : bien remarquer que la formulation (2.2) correspond à df alors que df_x est d'après la définition, linéaire et continue de E dans F !!! Ne pas confondre df et df_x .

2.2 Quelques exemples importants

1. Toute application constante est continûment différentiable, de différentielle NULLE.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ (i.e. linéaire continue), alors f est différentiable et $df_a = f$. Autrement dit, $df_a(h) = f(h)$ pour tous a et $h \in E$.
3. Si $B : E \times E \rightarrow F$ est bilinéaire, alors B est continûment différentiable et on a, pour tous $x_1, x_2, h_1, h_2 \in E$,

$$dB_{(x_1, x_2)}(h_1, h_2) = B(x_1, h_2) + B(h_1, x_2).$$

N.B. : la démonstration est faite en cours.

4. De façon plus générale, toute application multi-linéaire continue est continûment différentiable. Et si l'on définit n espaces de Banach E_1, \dots, E_n , alors le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \dots + \|x_n\|_{E_n},$$

est également un espace de Banach. On note $\phi : E \rightarrow F$ une application n -linéaire. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\} \in E_1 \times \dots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \dots \times E_n$, l'application partielle

$$x \in E_j \mapsto \phi(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire et si ϕ est en plus continue, toutes les applications partielles sont continues et ϕ est continûment différentiable, de différentielle donnée par

$$d\phi_{(x_1, \dots, x_n)}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n \phi(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

N.B. : la démonstration est faite en cours.

5. Une fonction $g : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ de variable réelle est différentiable si et seulement si elle est dérivable et

$$dg_x(h) = hg'(x) \text{ quels que soient } x \in U \text{ et } h \in \mathbb{R}.$$

N.B. : Faire attention que $h \in \mathbb{R}$ est un scalaire alors que $g'(x) \in F$ est un vecteur en général.

6. Inversement, quel que soit l'espace de Banach E , si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable, alors quels que soient $x \in U$ et $h \in E$, la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow F \\ t &\mapsto g(t) = f(x + th) \end{aligned}$$

est dérivable en $t = 0$, et $g'(0) = df_x(h)$. On dit alors que c'est la dérivée de f dans la direction h (si h est non nul).

7. Fonctions A VALEURS dans un espace produit. C'est une fonction de la forme

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow F = F_1 \times \dots \times F_n \\ x &\mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

Cette fonction f est différentiable en x si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_n sont différentiables. Et dans ce cas,

$$df_x(h) = (d(f_1)_x(h), \dots, d(f_n)_x(h)).$$

8. Fonctions DEFINIES SUR un espace produit. La situation ici, est un peu plus délicate. Si l'on considère la fonction

$$\begin{aligned} f : U \subset E = E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

et que cette fonction est différentiable, alors les applications partielles

$$x_i \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

sont différentiables, et si l'on note $d_i f$ leurs différentielles, on a

$$df_{(x_1, \dots, x_n)}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n d_i f_{(x_1, \dots, x_n)}(h_i).$$

N.B. : ATTENTION ! ici, la différentiabilité des applications partielles N'IMPLIQUE PAS nécessairement la différentiabilité de f . On verra plus tard que si $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{R}$ et si les applications partielles sont CONTINUEMENT DIFFERENTIABLES, alors f est CONTINUEMENT DIFFERENTIABLE.

2.3 Opérations sur les différentielles

Proposition 2 Si $f : U \subset E \rightarrow F$ et $g : V \subset E \rightarrow F$ sont différentiables respectivement sur des ouverts U et V d'un même espace E . Alors leur somme $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et

$$d(f + g) = d_f + d_g,$$

autrement dit, pour tout $x \in U \cap V$ et pour tout $h \in E$

$$d((f + g)_x(h) = df_x(h) + dg_x(h).$$

D'autre part, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est différentiable et

$$d(\lambda f) = \lambda df.$$

Cette proposition signifie que l'ensemble des fonctions différentiables sur $U \cap V$ et à valeurs dans F est un espace vectoriel et que la différentiation d est une application linéaire de cet espace vectoriel dans $\mathcal{L}(E; F)$.

Théorème 1 Règle de dérivation des fonctions composées. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \rightarrow G$ est différentiable en un point $y = f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ est différentiable en x et

$$d(g \circ f)_x(h) = dg_{f(x)}(df_x(h)) \text{ quels que soient } x \in U \text{ et } h \in E.$$

Autrement dit

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x \text{ quel que soit } x \in U.$$

Preuve. Faite en cours.

Exemple 2 Considérons l'ensemble U des $u \in E = \mathcal{L}(X; Y)$ (où X et Y sont des \mathbb{R} -espaces de Banach) qui sont inversibles (et que l'on appelle des ISOMORPHISMES) :

$$\text{Isom}(X, Y) := \{u \in \mathcal{L}(X; Y); \text{ il existe } v \in \mathcal{L}(Y; X), v \circ u = Id_X \text{ et } u \circ v = Id_Y\}.$$

Cet ensemble est un ouvert de E (à faire en exercice). Noter que Id_X (resp. Id_Y) est l'application identité sur X (resp. sur Y). Soit alors la fonction

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow F := \mathcal{L}(Y; X) \\ u &\mapsto u^{-1}. \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \phi : E \times F &\rightarrow F := \mathcal{L}(X; X) \\ (u, v) &\mapsto v \circ u. \end{aligned}$$

est bilinéaire continue, et on a par définition $\phi(u, f(u)) = Id_X$. Ensuite, en supposant a priori que f est différentiable, on a pour tout $u \in U$ et $h \in E$,

$$\phi(h, f(u)) + \phi(u, df_u(h)) = 0.$$

On obtient ce résultat en considérant la composition de $u \mapsto (u, f(u)) \mapsto \phi(u, f(u))$, et en considérant Id_X comme étant une fonction constante en fonction de u ! Attention, on ne fait pas le raisonnement en fonction de la variable $x \in X$ mais de la fonction $u \in \mathcal{L}(X; Y)$ et dans ce cas là, Id_X est considérée comme fonction constante. Si l'on note $l : u \mapsto u$ pour $u \in U$, alors l est linéaire et on obtient

$$\begin{aligned} d\phi_{(u, f(u))} \circ (dl_u(h), df_u(h)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi(u, df_u(h)) + \phi(dl_u(h), f(u)) &= 0, \\ \Leftrightarrow df_u(h) \circ u + f(u) \circ h &= 0, \\ \Leftrightarrow df_u(h) \circ u + u^{-1} \circ h &= 0, \\ \Leftrightarrow df_u(h) \circ u &= -u^{-1} \circ h, \\ \Leftrightarrow df_u(h) &= -u^{-1} \circ h \circ u. \end{aligned}$$

2.4 Dimension finie

Dans tout ce paragraphe on supposera que $E = \mathbb{R}^p$ et que $F = \mathbb{R}^q$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si l'on considère $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$, on notera x_1, \dots, x_p les composantes de x et y_1, \dots, y_q celles de y . On notera également e_1, \dots, e_p les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p . Par définition, le vecteur e_i ($i \in \{1, \dots, p\}$) a toutes ses composantes nulles sauf la i -ème qui vaut 1.

2.4.1 Dérivées partielles

Pour tout $x \in U$ de composantes x_1, \dots, x_p , et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on note l'ensemble

$$V_i(x) = \{t \in \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p) \in U\}$$

comme étant un voisinage ouvert de x_i . On suppose $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F$ différentiable. Alors l'application partielle

$$\begin{aligned} g_i : V_i(x) &\rightarrow F \\ t &\mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p) = f(x + (t - x_i)e_i) \end{aligned}$$

est dérivable en x_i et

$$g'_i(x_i) = df_x(e_i),$$

c'est la dérivée de f dans la direction e_i au point x . Il est d'usage de noter cette dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \text{ ou } \partial_{x_i} f(x), \text{ ou encore } \partial_i f(x).$$

On appelle dérivées partielles de f les fonctions, définies pour $i \in \{1, \dots, p\}$ par

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} f : U &\rightarrow F \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Par linéarité de df_x , on voit que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$df_x(h) = df_x\left(\sum_{i=1}^p h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p h_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Notation. Quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$, l'application

$$\begin{aligned} dx_i : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto h_i, \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue (autrement dit élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$). De telle sorte que la différentielle de f au point x s'écrit

$$df_x = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

N.B. : Etant donné que $F = \mathbb{R}^q$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(x) \right),$$

et donc l'expression précédente se lit

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^p h_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(x) \right)^t. \quad (2.3)$$

ATTENTION! Comme nous l'avons dit précédemment, l'existence de dérivées partielles n'est pas suffisante en général pour qu'une fonction soit différentiable. Ce qui nous amène au théorème suivant.

Théorème 2 Une application $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F = \mathbb{R}^q$ est continûment différentiable si et seulement si ses p dérivées partielles existent et sont continues sur U .

Preuve. Faite en cours.

2.4.2 Matrice Jacobienne

Si une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F = \mathbb{R}^q$ de composantes f_1, \dots, f_q est différentiable au point x , on définit sa matrice jacobienne au point x comme la matrice de l'application linéaire df_x dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q . Elle est donnée par

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x) & \dots & \partial_{x_p} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_q(x) & \dots & \partial_{x_p} f_q(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$$

N.B. : Si l'on considère $h = (h_1, \dots, h_p)$, nous avons $df_x(h) = Df(x)(h_1, \dots, h_p)^t$, qui correspond à la formule (2.3).

Remarque 6 Nous pouvons faire les quatre remarques suivantes :

1. Si $p = q$ le déterminant de la matrice jacobienne de f en x est appelé jacobien. Et dans ce cas, la différentielle df_x est un isomorphisme linéaire si et seulement si la matrice jacobienne est une matrice (carrée) inversible ou encore si et seulement si le jacobien est non nul.
2. Les coefficients de la matrice jacobienne de f d'indice $i \in \{1, \dots, q\}$ en ligne et $j \in \{1, \dots, p\}$ en colonne est

$$(Df(x))_{i,j} = \partial_{x_j} f_i(x).$$

En particulier, si $q = 1$, $Df(x)$ est une matrice ligne. Et de façon plus générale, les lignes des $Df(x)$ sont les $Df_i(x)$.

3. On note parfois $\nabla f(x)$ (qui se lit nabla f de x) la matrice transposée de $Df(x)$, autrement dit

$$(\nabla f(x))_{i,j} = \partial_{x_i} f_j(x).$$

En fait, cette notation est surtout utilisée lorsque $q = 1$, auquel cas, $\nabla f(x)$ est un vecteur colonne, que l'on identifie à un vecteur de \mathbb{R}^p appelé gradient de f au point x .

4. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable en un point $x \in U$ et si $g : V \subset F \rightarrow G$ est différentiable en un point $y = f(x) \in V$, alors la fonction composée $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ est différentiable en x comme nous l'avons dit précédemment et si en plus $E = \mathbb{R}^p$, et $F = \mathbb{R}^q$, la composition des différentielles revient à faire une multiplication matricielle des jacobiniennes

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)).Df(x).$$

2.4.3 Opérateurs différentiels classiques

Gradient

Pour une fonction différentiable à valeurs scalaires ($q = 1$)

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

le gradient est défini par

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi : U \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto (\text{grad}\varphi)(x) := (\partial_{x_1}\varphi(x), \dots, \partial_{x_p}\varphi(x))^t. \end{aligned}$$

Divergence

Pour une fonction différentielle $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($q = p$) de composante f_1, \dots, f_p on définit sa divergence par

$$\begin{aligned} \text{div}f : U \subset \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\text{div}f)(x) := \text{tr}(Df(x)) = \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}f_i(x), \end{aligned}$$

où $\text{tr}(Df(x))$ est la trace de la matrice jacobienne. On peut écrire parfois $\text{div}(f) = \nabla \cdot f$, où le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^p est défini par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

Rotationnel

Si $p = 3$ on définit le rotationnel de f par

$$\begin{aligned} \text{rot}f : U \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (\text{rot}f)(x), \end{aligned}$$

où

$$(\text{rot}f)(x) = (\partial_{x_2}f_3(x) - \partial_{x_3}f_2(x), \partial_{x_3}f_1(x) - \partial_{x_1}f_3(x), \partial_{x_1}f_2(x) - \partial_{x_2}f_1(x)).$$

Chapitre 3

Théorème des accroissements finis

3.1 Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Rappel 6 Théorème de Rolle. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, où $a < b$, une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve. Faite en cours.

Théorème 3 Égalité des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$, où $a < b$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Preuve. Faite en cours.

3.2 Fonction d'une valeur sur un espace E et à valeurs réelles

Définition 7 Segment On appelle segment fermé (respectivement segment ouvert) d'extrémités a et b d'une espace E , l'ensemble

$$[a, b] \text{ (resp. }]a, b[) = \{ta + (1 - t)b \text{ tel que } t \in [0, 1] \text{ (resp. } t \in]0, 1[)\}.$$

Définition 8 Ensemble convexe. On dit que $A \subset E$ est convexe si pour tout $(a, b) \in A^2$, le segment fermé $[a, b] \subset A$.

Théorème 4 Soit $U \subset E$, convexe et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et $[a, b] \subset U$. Si f est différentiable en tout point de $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df_c(b - a)$.

Preuve. Faite en cours.

Remarque 7 ATTENTION! ce théorème ne s'applique pas au cas des applications $f : U \subset E \rightarrow F = \mathbb{R}^p$, où $p > 1$, et encore moins si F est de dimension infinie - voir des exemples en cours.

3.3 Fonction d'une variable réelle

Théorème 5 Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeur dans un \mathbb{R} -espace de Banach F . On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f'(t)\|_F \leq k \text{ quel que soit } t \in I.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k|x - y| \text{ quel que soit } (x, y) \in I \times I. \quad (3.1)$$

Preuve. Faite en cours.

Remarque 8 On remarque :

1. que l'on peut avoir une inégalité (3.1) plus fine en prenant

$$k = \sup_{t \in [0,1]} \|f'(ty + t(x - y))\|_F.$$

On pourra alors dire

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{t \in I} \|f'(t)\|_F |x - y|,$$

pour tous $x, y \in I$.

2. que ce résultat s'applique même pour x et y au bord de l'intervalle I à condition que f soit continue sur l'intervalle fermé \bar{I} et que l'on ait une estimation de f' sur l'intervalle ouvert I .

Résultat un peu plus général.

Théorème 6 Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et à valeur dans un \mathbb{R} -espace de Banach F . On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\|f'(t)\|_F \leq \varphi'(t) \text{ quel que soit } t \in I.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \text{ quel que soit } (x, y) \in I \times I.$$

Preuve. Non démontré dans ce cours.

3.4 Théorème général

On considère E et F comme étant des \mathbb{R} -espaces de Banach.

Théorème 7 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une fonction différentiable sur un ouvert CONVEXE U . On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\|df_u\| \leq k \text{ quel que soit } u \in U.$$

Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \text{ quel que soit } (x, y) \in U \times U.$$

Preuve. Faite en cours.

Remarque 9 On peut avoir en fait une inégalité plus fine

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{t \in [0,1]} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_E.$$

Et même mieux, par 2. de la Remarque 8, nous avons,

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{t \in]0,1[} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_E.$$

Nous avons en fait un résultat un peu plus général qui ne nécessite pas le fait que U soit convexe. Il est donné dans la proposition suivante.

Proposition 3 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, U ouvert de E , et soient $x, y \in U$, tels que le segment $[x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} \subset U$. On suppose que f est continue sur $[x, y]$ et différentiable sur $]x, y[= \{x + t(y - x), t \in]0, 1[\} \subset U$. Alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{t \in]0,1[} \|df_{(x+t(y-x))}\| \|x - y\|_E.$$

Grâce à cette proposition, nous pouvons démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 1 Soit $U \subset E$ convexe et $f : U \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 . Si $M = \sup_{x \in U} \|df_x\| < +\infty$. Alors f est M -lipschitzienne sur U .

3.5 Quelques applications

Définition 9 Un sous-ensemble d'espace topologique X (par exemple un espace de Banach) est dit CONNEXE s'il ne peut s'écrire comme une réunion disjointe de deux ouverts non vides.

Cette définition est équivalente à la définition suivante.

Définition 10 Un sous-ensemble d'un espace topologique X est dit connexe s'il n'admet pas de sous-ensemble à la fois ouvert et fermé autre que l'ensemble vide et lui-même.

Théorème 8 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, où U est un ouvert de E .

1. Si f est constante sur U , alors f est différentiable sur U et pour tout $x \in U$ $df_x \equiv 0$.
2. Si U est CONNEXE, f différentiable sur U telle que $df_x \equiv 0$, alors f est constante sur U .

Preuve. Faite en cours.

Proposition 4 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ continue, différentiable sur $U \setminus \{a\}$. Si $df : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, se prolonge par continuité au point a en prenant la valeur $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable en a et $df_a = L$.

Et enfin, nous avons le théorème suivant.

Théorème 9 Soient E_1, \dots, E_n des espaces de Banach et $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni (par exemple) de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \dots + \|x_n\|_{E_n}.$$

Une fonction

$$\begin{aligned} f : U \subset E &\rightarrow F \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est continûment différentiable si et seulement si pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, l'application partielle

$$y_i \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est différentiable en $y_i = x_i$ et sa différentielle définit une fonction (appelée différentielle partielle) continue de U dans $\mathcal{L}(E_i, F)$.

Preuve. Faite en cours.

Chapitre 4

Difféomorphismes

4.1 Introduction

Soient U et V des OUVERTS (non vides) d'espaces de Banach E et F respectivement.

Définition 11 Difféomorphisme. On dit qu'une application $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de U sur V si et seulement si

1. f est une bijection,
2. f est de classe \mathcal{C}^1 , c'est à dire continûment différentiable sur U ,
3. f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Proposition 5 Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme alors sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F et la différentielle de sa fonction réciproque f^{-1} est liée à celle de f par la formule

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1} \quad \text{pour tout } y \in V.$$

Preuve. Faite en cours.

Corollaire 2 S'il existe un difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de F , les deux espaces sont ISOMORPHES. En particulier, si l'un des deux est de dimension finie, l'autre aussi et sa dimension est la même.

4.2 Théorème d'inversion locale

Théorème 10 Si

1. $f : U \rightarrow V$ est de classe \mathcal{C}^1 ,
 2. $a \in U$ est tel que df_a soit un isomorphisme de E sur F ,
- alors il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un difféomorphisme de U_a sur V_b .

Preuve. Faite en cours.

Corollaire 3 “Théorème d’inversion globale”. Soit $f : U \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 avec U un ouvert non vide. C’est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si

1. elle est injective, et
2. sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de E sur F .

Preuve. Faite en cours.

Corollaire 4 Dimension finie. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ injective et de classe \mathcal{C}^1 . Alors f est un difféomorphisme si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne (que l’on appelle jacobien de f) ne s’annule pas sur U .

Preuve. Non démontré ici.

4.3 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites concerne la résolution d’équations non-linéaires de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

et doit son nom au fait que, sous les hypothèses que l’on va préciser, on peut en tirer y comme fonction de x : on dit alors que $f(x, y) = 0$ définit implicitement y , ou encore y comme fonction implicite de x .

Soient E, F et G , trois espaces de Banach.

Théorème 11 Soit U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \rightarrow G$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu’il existe $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0_G$ et la différentielle partielle de f par rapport à y , $d_2 f$ est telle que $d_2 f_{(a,b)}$ soit un isomorphisme de F sur G . Alors il existe un voisinage ouvert $U_{(a,b)}$ de (a, b) dans U , un voisinage ouvert W_a de a dans E et une fonction de classe $\mathcal{C}^1(W_a, F)$

$$\varphi : W_a \rightarrow F$$

telle que

$$((x, y) \in U_{(a,b)} \text{ et } f(x, y) = 0_G) \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Preuve. Faite en cours.

Proposition 6 Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, et quitte à réduire W_a on a

$$d\varphi_x(h) = -(d_2 f_{(x, \varphi(x))})^{-1} d_1 f_{(x, \varphi(x))}(h)$$

pour tout $x \in W_a$ et pour tout $h \in E$.

Preuve. Faite en cours.

Voici un résultat qui permet de simplifier la vérification des hypothèses des théorèmes d’inversion locale ou des fonctions implicites.

Théorème 12 *Si E et F sont des espaces de Banach, si u est un application linéaire continue et bijective de E sur F , alors sa réciproque est continue.*

N.B. :

1. on rappelle qu'en dimension finie ce résultat n'a pas d'intérêt puisque toutes les applications linéaires sont continues.
2. Ainsi, pour vérifier que u est un isomorphisme de E sur F , il suffit de vérifier que u est linéaire, continue et bijective.

Chapitre 5

Différentielles d'ordre supérieur

5.1 Différentielles d'ordre 2

Définition 12 Une fonction f définie sur un OUVERT (non vide) U d'un \mathbb{R} -espace de Banach E et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace de Banach F est dite deux fois différentiable en $x \in U$ si

1. elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x et si,
2. sa différentielle $df : U_x \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ est différentiable en x .

On dit que f est deux fois différentiable dans U si elle est différentiable en tout point de U .

Par sa définition, la différentielle de df en x , que l'on écrit $d(df)_x$ est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E; F)$. Autrement dit, on a

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(E; F),$$

et

$$d(df)_x : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E; F)).$$

Mais elle s'identifie naturellement avec une application linéaire continue sur $E \times E$ grâce à la proposition suivante.

Proposition 7 Soient E, F et G des espaces de Banach. Alors les espaces $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$ et $\mathcal{L}(E, F; G)$ munis des normes usuelles

$$\begin{aligned} \|l\|_{\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))} &= \sup\{\|l(h)\|_{\mathcal{L}(F; G)}, \|h\|_E \leq 1\}, \\ \|\phi\|_{\mathcal{L}(E, F; G)} &= \sup\{\|\phi(h, k)\|_G, \|h\|_E \leq 1, \|k\|_E \leq 1\}, \end{aligned}$$

sont isométriques.

Preuve. Faite en cours.

Définition 13 La différentielle seconde d'une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ deux fois différentiable est l'application

$$\begin{aligned} d^2 f : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, E; F) \\ x &\mapsto d^2 f_x \end{aligned}$$

définie par

$$d^2 f_x(h, k) = d(df)_x(h)(k) \text{ pour tout } (h, k) \in E \times E.$$

Remarque 10 On peut interpréter cette définition de la façon suivante (qu'on utilise en pratique pour calculer $d^2 f$). Si f est deux fois différentiable sur U , alors, quel que soit $k \in E$, l'application

$$\begin{aligned} g : U &\rightarrow F \\ x &\mapsto df_x(k) \end{aligned}$$

est différentiable et

$$dg_x(h) = d^2 f(h, k).$$

Théorème 13 Théorème de Schwarz. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est deux fois différentiable en x alors $d^2 f_x$ est une application bilinéaire SYMETRIQUE. Autrement dit, pour tout $(h, k) \in E \times E$, on a

$$d^2 f_x(h, k) = d^2 f_x(k, h).$$

Preuve. Faite en cours.

5.2 Exemples de différentielles d'ordre 2

1. Une application affine $f : x \rightarrow l(x) + b$ avec $l \in \mathcal{L}(E; F)$ et $b \in F$ est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est identiquement nulle.
2. Une application quadratique $f : x \rightarrow \phi(x, x)$ avec $\phi \in \mathcal{L}(E, E; F)$ est deux fois différentiable et sa différentielle seconde est constante, et même égale à 2ϕ si ϕ est symétrique.

5.3 En dimension finie

Définition 14 Matrice Hessienne. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et soit (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p . Si f est deux fois différentiable sur l'ouvert U alors pour tout $x \in U$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$

$$d_x^2 f(e_i, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Alors la matrice

$$d^2 f_x := \text{Hess } f_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne de f en x .

Le théorème de Schwarz montre que les dérivées partielles croisées sont égales, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$. Et donc la matrice hessienne est symétrique. Ces dérivées sont en général notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Par bilinéarité, si h et k sont deux vecteurs de \mathbb{R}^p de composantes (h_1, \dots, h_p) et (k_1, \dots, k_p) respectivement, alors

$$d_x^2 f(h, k) = {}^t k \cdot \text{Hess } f_a \cdot h = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Autrement dit, $\text{Hess } f_a$ est la matrice de la forme bilinéaire $d^2 f_a$ par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^n . L'égalité de Schwarz assure de plus que la matrice hessienne est symétrique.

5.4 Différentielle d'ordre n

Pour les entiers $n \geq 2$, on définit par récurrence les notions suivantes, qui généralisent le cas $n = 2$.

Définition 15 Soit une fonction f définie sur un ouvert (non vide) U d'un \mathbb{R} -espace de Banach E et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace de Banach F , et n un entier au moins égal à 2. On dit qu'elle est :

1. n fois différentiable en $x \in U$ si elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x , et si sa différentielle $df : U_x \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ est $(n - 1)$ fois différentiable en x .
2. n fois différentiable dans U si elle est n fois différentiable en tout point de U .
3. de classe \mathcal{C}^n si et seulement si sa différentielle est de classe \mathcal{C}^{n-1} .
4. de classe \mathcal{C}^∞ est de classe de \mathcal{C}^n pour tout $n \geq 1$.

Propriété 2 Les applications linéaires continues et plus généralement les applications k -linéaires continues sont de classe \mathcal{C}^∞ .

Théorème 14 Soient E, F et G des espaces de Banach, soient U un ouvert de E et V un ouvert de F contenant U . Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est n fois différentiable en $x \in U$ et $g : V \subset F \rightarrow G$ est n fois différentiable en $y = f(x) \in V$, alors $g \circ f$ est n fois différentiable en x . Si f est de classe \mathcal{C}^n sur U et g est de classe \mathcal{C}^n sur V alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n .

Preuve. Faite en cours.

Théorème 15 Si f est un difféomorphisme de U sur V et si f est de classe \mathcal{C}^n alors f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^n .

Preuve. Faite en cours.

Définition 16 Soient E et F des \mathbb{R} -espaces de Banach, et $\mathcal{L}_n(E; F)$ l'espace des applications n -linéaires continues sur E^n . Une application $\phi \in \mathcal{L}_n(E; F)$ est dite symétrique si pour tout permutation $\sigma \in \sum_n$ et pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \phi(x_1, \dots, x_n).$$

On notera $\mathcal{L}_n^s(E; F)$ l'espace des applications n -linéaires continues et symétriques sur E^n .

Théorème 16 Une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est n fois différentiable au point $x \in U$ si et seulement s'il existe

1. un voisinage ouvert U_x de x dans U ,
2. des fonctions $d^p f : U_x \rightarrow \mathcal{L}_p^s(E; F)$ pour $p \leq n - 1$, et
3. $d^n f_x \in \mathcal{L}_n^s(E; F)$

telles que

1. $d^1 f = df$ dans U_x pour tout $p \leq n - 2$,
2. $d^p f$ est différentiable sur U_x , avec pour tout $y \in U_x$, et
3. pour tout $(h_1, \dots, h_{p+1}) \in E^{p+1}$:

$$d^{p+1} f_y(h_1, \dots, h_{p+1}) = d_{p+1} g_y^{[p]}(h_{p+1}) \text{ pour } g^{[p]}(h_1, \dots, h_p, y) := d^p f_y(h_1, \dots, h_p),$$

et enfin,

4. $d^{n-1} f$ est différentiable en x et

$$d^n f_x(h_1, \dots, h_n) = d_n g_x^{[n-1]}(h_n) \circ g^{[n-1]}(h_1, \dots, h_{n-1}, y) := d^{n-1} f_y(h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Preuve. Faite en cours.

Chapitre 6

Formules de Taylor

6.1 Formule de Taylor avec reste intégral

6.1.1 Fonction d'une variable réelle à valeur réelle

Théorème 17 Soit $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b = a + h \in I$, alors

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{(p+1)}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a + th) dt.$$

Preuve. Faite en cours.

6.1.2 Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach

Lemme 1 Soit I un ouvert de \mathbb{R} , F un espace de Banach et $g : I \rightarrow F$ une fonction $(n + 1)$ fois dérivable. On note $g^{(p)}$ ses dérivées successives, $p \in \{1, \dots, n + 1\}$. Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$\frac{d}{dt} \left(g(t) + \sum_{p=1}^n \frac{(1-t)^p}{p!} g^{(p)}(t) \right) = \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t).$$

Preuve. Faite en cours.

Proposition 8 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et F un espace de Banach. Alors l'intégrale de Riemann sur le segment $[a, b]$ définit une application linéaire continue sur l'espace $\mathcal{C}([a, b]; F)$ des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans F , muni de la norme sup. Pour tout $g \in \mathcal{C}([a, b]; F)$, l'intégrale de Riemann de g sur le segment $[a, b]$, notée $\int_a^b g(t) dt$, vérifie l'inégalité

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \|g(t)\|.$$

Quels que soient $x, y \in [a, b]$, on a par définition

$$\int_x^y g(t)dt = - \int_y^x g(t)dt,$$

et donc $\int_x^x g(t)dt = 0$, et

$$\int_x^y g(t)dt = \int_x^z g(t)dt + \int_z^y g(t)dt,$$

pour tout $z \in [a, b]$. De plus l'application $y \mapsto \int_x^y g(t)dt$ est dérivable et sa dérivée est g . Inversement, pour toute primitive G de g , on a

$$G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)dt.$$

Remarque 11 Si F est de dimension finie, $F = \mathbb{R}^q$ pour simplifier $\int_a^b g(t)dt$ est simplement le vecteur dont les composantes sont $\int_a^b g_i(t)dt$ où les g_i sont les $i \in 1, \dots, n$ sont les composantes de g dans la base canonique.

Corollaire 5 Si I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant $[0, 1]$, F est un espace de Banach et $g : I \rightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$, alors

$$g(1) - g(0) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} g^{(p)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$$

6.1.3 Fonction d'un espace de Banach à valeur dans un espace de Banach

Pour tout $h \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $h^{[n]}$ le n -uplet de vecteurs tous égaux à h .

Théorème 18 Si U est un ouvert d'un espace de Banach E , si F est un espace de Banach et $f : U \rightarrow F$ est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} , alors pour tout $(x, h) \in U \times E$ tel que le segment $[x, x+h]$ soit inclus dans U ,

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} d^p f_x(h^{[p]}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f_{x+th}(h^{[n+1]})dt.$$

Preuve. Faite en cours.

Remarque 12 Cette dernière formule à l'ordre 2 avec $n = 1$, s'écrit

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \int_0^1 (1-t)d^2 f_{x+th}(h, h)dt.$$

6.2 Formule de Taylor-Lagrange

6.2.1 Fonction d'une variable réelle à valeur dans un espace de Banach

Proposition 9 Si I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant $[0, 1]$, F un espace de Banach et $g : I \rightarrow F$ une fonction $(n + 1)$ fois différentiable telle que

$$\|g^{(n+1)}(t)\| \leq M, \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

alors

$$\|g(1) - g(0) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} g^{(p)}(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!}.$$

Preuve. Faite en cours.

6.2.2 Fonction d'une espace de Banach à valeur dans un espace de Banach

Théorème 19 1. Si U est un ouvert d'un espace de Banach E , si F est un espace de Banach, 2. si $(x, h) \in U \times E$ est tel que le segment $[x, x + h]$ soit inclus dans U , et 3. si $f : U \rightarrow F$ est une fonction $(n + 1)$ fois différentiable telle que

$$\max_{y \in [x, x+h]} \|d^{n+1} f_y\|_{\mathcal{L}_{n+1}(E;F)} \leq M,$$

alors

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} d^p f_x(h^{[p]})\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}.$$

La dernière inégalité qui généralise l'inégalité des accroissements finis, est connue sous le nom de formule de Taylor avec reste de Lagrange, le reste étant cependant connu à travers une majoration contrairement au reste intégral qui est exact.

6.3 Formule de Taylor-Young

Cette formule est valable sous des hypothèses moins fortes, et donc, pour cette raison, donne un résultat seulement local.

Théorème 20 Si U est un ouvert d'un espace de Banach E , si F est un espace de Banach, si $f : U \rightarrow F$ est une fonction n fois différentiable en $x \in U$ alors

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} d^p f_x(h^{[p]})\| = o(\|h\|^n).$$

Remarque 13 Dans l'énoncé de ce théorème, la notation de Landau o signifie que le membre de gauche divisé par $\|h\|^n$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Il s'agit donc d'un résultat local, qui donne des renseignements sur le comportement de f au voisinage de x seulement.

Preuve. Faite en cours.

Chapitre 7

Extrema

7.1 Extrema libres

Définition 17 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 . On dit que $a \in U$ est un point critique de f si $df_a = 0$.

Dans ce qui suit, on ne parlera en fait que de minima pour simplifier : les maxima d'une fonction f peuvent en effet être vus comme les minima de $-f$.

Définition 18 Si f est une fonction définie sur une partie D d'un espace de Banach E et à valeurs réelles, un point $a \in U$ est un minimum local de f s'il existe un voisinage V_a de a ouvert dans D tel que

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in V_a.$$

On dira que a est un minimum global de f si

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in U.$$

Un minimum est dit strict si l'inégalité est stricte, c'est à dire $f(x) > f(a)$, pour tout $x \neq a$.

7.1.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Proposition 10 Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , dérivable en $a \in I$. Si a est un minimum local de g alors $g'(a) = 0$. Si de plus g est deux fois dérivable en a , alors $g''(a) \geq 0$.

Inversement, si $b \in I$ est tel que $g'(b) = 0$ et $g''(b) > 0$ alors b est un minimum local de g .

Preuve. Faite en cours.

Remarque 14 Attention ! Les conditions $g'(a) = 0$ et $g''(a) \geq 0$ ne sont pas suffisantes !

7.1.2 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles

Théorème 21 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$ point critique de f . Alors

1. Si $\text{Hess } f_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (res. maximum) local strict en a .
2. Si f admet un minimum (resp. maximum) local en a alors $\text{Hess } f_a$ est positive (resp. négative).

Preuve. Faite en cours.

Remarque 15 Déterminer si $\text{Hess } f_a$ est définie négative ou positive revient à déterminer les valeurs propres de $\text{Hess } f_a$.

1. Si toutes les valeurs propres sont > 0 , $\text{Hess } f_a$ est définie positive.
2. Si toutes les valeurs propres sont < 0 , $\text{Hess } f_a$ est définie négative.
3. Si les valeurs propres de $\text{Hess } f_a$ sont non nulles mais de signes différents, on dit que a est un point col (ou un point selle).

Corollaire 6 Si $n=2$. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$ point critique de f . On note $\Delta(a)$ le déterminant de $\text{Hess } f_a$. On l'appelle le Hessien de f en a .

Alors

1. Si $\Delta(a) > 0$ et $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a) > 0$ ou $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a) > 0)$ alors a est un minimum local strict.
2. Si $\Delta(a) > 0$ et $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a) < 0$ ou $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a) < 0)$ alors a est un maximum local strict.
3. Si $\Delta(a) < 0$ alors a est un point selle.

7.1.3 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles

Théorème 22 Soit f une fonction définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeurs réelles, différentiable en $a \in U$.

Si a est un minimum local de f alors $df_a = 0$.

Si de plus f est deux fois différentiable en a , alors $d^2 f_a(h, h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.

Inversement si $b \in U$ est tel que $df_b = 0$ et il existe $C > 0$ avec $d^2 f_b(h, h) \geq C\|h\|^2$ pour tout $h \in E$, alors b est un minimum local de f .

Preuve. Faite en cours.

Remarque 16 En dimension finie, l'existence de $C > 0$ tel que $d^2 f_b(h, h) \geq C\|h\|^2$ pour tout vecteur $h \in E$ équivaut à $d^2 f_b(h, h) > 0$ quel que soit $h \neq 0_E$.

7.2 Extrema liés

7.2.1 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles

Définition 19 Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$. On dit que Γ est régulier (ou encore qu'il satisfait à la condition de qualification non dégénérée) si pour tout $a \in \Gamma$, $dg_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est surjective.

Remarque 17 Si $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($p = 1$) la condition signifie seulement que pour tout $a \in \Gamma$, $dg_a \neq 0$.

Théorème 23 Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ régulière. Si $a \in \Gamma$ est un extremum local de $f|_{\Gamma}$, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

N.B. : Le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Théorème 24 Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, et $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ régulière. Si $a \in \Gamma$ est un extremum local de $f|_{\Gamma}$, alors il existe un unique $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$df_a + \sum_{i=1}^p \lambda_i (dg_i)_a = 0.$$

N.B. : ce théorème est une généralisation du théorème précédent (si on prend $p = 1$).

7.2.2 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles

Définition 20 Si f et g_1, \dots, g_p sont des fonctions définies sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs dans \mathbb{R} , un point $a \in U$ tel que $g_1(a) = 0, \dots, g_p(a) = 0$ est un minimum local de f sous les contraintes g_1, \dots, g_p s'il existe un voisinage V_a de a tel que

$$f(x) \geq f(a)$$

pour tout $x \in V_a$ tel que $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$.

Le prochain théorème est une condition nécessaire pour qu'un point soit un minimum local sous contraintes lorsque les fonctions f et g_1, \dots, g_p sont continûment différentiables. On dira que les contraintes g_1, \dots, g_p sont indépendantes au point $a \in U$ si la famille de formes linéaires continues $\{(dg_1)_a, \dots, (dg_p)_a\}$ est libre.

Théorème 25 Soient f et g_1, \dots, g_p sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = 0, \dots, g_p(a) = 0$ et les contraintes g_1, \dots, g_p sont indépendantes au point a . Si a est un minimum local de f sous les contraintes g_1, \dots, g_p , alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$df_a = \lambda_1(dg_1)_a + \dots + \lambda_p(dg_p)_a.$$

N.B. : Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Preuve. Faite en cours.

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont liés à des problèmes d'extremum essentiellement sur des ouverts : et il est à noter que les conditions nécessaires d'extremum local sont fausses lorsque U n'est pas un ouvert.

Nous allons dans la section suivante considérer des problèmes d'extremum sur des sous-ensemble convexes de E .

7.3 Convexité et minima

Définition 21 Un sous-ensemble C d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est dit convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\theta \in [0, 1]$, $\theta x + (1 - \theta)y \in C$. Une fonction f est définie sur un convexe C à valeurs dans \mathbb{R} est dite convexe, si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $x \neq y$ et $\theta \in]0, 1[$.

Théorème 26 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U d'un \mathbb{R} -espace de Banach E et soit C un sous-ensemble convexe de U . Alors $f|_C$ est convexe si et seulement si, pour tous $x, y \in C$,

$$f(y) \geq f(x) + df_x(y - x).$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq y$. En supposant en outre que f est deux fois différentiable, $f|_C$ est convexe si et seulement si, pour tous $x, y \in C$

$$d^2 f_x(y - x, y - x) \geq 0.$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq y$.

Preuve. Faite en cours.

Théorème 27 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U d'un \mathbb{R} -espace de Banach et soit C un sous-ensemble convexe de U .

1. Si $f|_C$ est convexe et admet un minimum local dans C , c'est un minimum global.
2. Si $f|_C$ est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict.

3. Si f est différentiable, une condition nécessaire pour qu'un point $a \in C$ soit un minimum de $f|_C$ est

$$df_a(y - a) \geq 0,$$

pour tout $y \in C$. Si de plus $f|_C$ est convexe, cette condition est également suffisante.

Preuve. Faite en cours.

Chapitre 8

Equations différentielles

8.1 Première définition

Définition 22 On appelle équation différentielle d'ordre n une équation de la forme

$$(E_1) \quad u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}),$$

où f est une application définie sur $I \times U \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$, I étant un intervalle de \mathbb{R} et U, U_1, \dots, U_{n-1} des ouverts d'un espace de Banach E .

On appelle solution de (E_1) une application u de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle $J \subset I$ telle que pour tout $t \in J$, $u(t) \in U$, $u'(t) \in U_1$, ..., $u^{(n-1)}(t) \in U_{n-1}$ et

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)).$$

Cas particuliers.

1. Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'équation différentielle est dite scalaire.
2. Lorsque f est linéaire par rapport à $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$, l'équation différentielle est dite linéaire homogène (à coefficients constants si de plus f ne dépend pas de t). Si f est de la forme

$$f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = g(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) + b(t),$$

avec g linéaire par rapport à $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$, l'équation différentielle est dite linéaire avec terme de source.

3. Lorsque f est indépendante de t , l'équation différentielle est dite autonome.

8.2 Résolution explicite

8.2.1 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

Etant donné deux fonctions a et $b \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$, l'équation

$$u' = a(t)u + b(t),$$

admet pour solutions les fonctions de la forme

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau) d\tau} b(s) ds,$$

avec $t_0 \in I, u_0 \in \mathbb{R}$.

8.2.2 Equations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

Pour $p, q \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

sont de trois formes possibles, suivant les propriétés de l'équation caractéristique

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

1. $u(t) = u_1 e^{at} \cos(bt) + u_2 e^{at} \sin(bt)$ si l'équation caractéristique a ses racines complexes conjuguées ($a \pm ib$),
2. $u(t) = u_1 e^{a_1 t} + u_2 e^{a_2 t}$ si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes (a_1 et a_2),
3. $u(t) = (u_1 + tu_2) e^{at}$ si l'équation caractéristique a une racine réelle double (a).

8.2.3 Equations linéaires à coefficients constants

Cas homogène

Si A est une application linéaire continue sur E , les solutions de

$$u' = Au$$

s'expriment à l'aide d'exponentielle :

$$u(t) = e^{tA} u_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n u_0.$$

En dimension finie, on peut préciser la forme des solutions en fonction des valeurs propres de A . Supposons en effet que $A \in \mathcal{L}(E)$ admette comme ensemble des valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. On sait que E se décompose en somme directe des sous espaces caractéristiques

$$E_j = \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{s_j},$$

où s_j est défini comme le plus grand entier s tel que $\text{Ker}(A - \lambda_j I)^{s-1}$ soit strictement inclus dans $\text{Ker}(A - \lambda_j I)^s$. Par suite, tout élément u_0 de E s'écrit de façon unique $u_0 = \sum_{j=1}^k u_{0,j}$ avec $u_{0,j} \in E_j$. D'où

$$e^{tA} u_0 = \sum_{j=1}^k e^{tA} u_{0,j} = \sum_{j=1}^k e^{t\lambda_j} e^{t(A-\lambda_j I)} u_{0,j} = \sum_{j=1}^k e^{t\lambda_j} \sum_{n \leq s_j - 1} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_j I)^n u_{0,j},$$

puisque par définition de E_j , $(A - \lambda_j I)|_{E_j}^n = 0$ pour $n \geq s_j$. Autrement dit, les solutions de l'équation différentielle $u' = Au$ sont alors de la forme

$$u(t) = \sum_{j=1}^k e^{t\lambda_j} P_j(t) u_{0,j},$$

où P_j est une application polynomiale à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$.

Cas avec terme de source

Pour résoudre l'équation

$$u' = Au + b(t),$$

on peut appliquer ce que l'on appelle la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on remplace la constante u_0 de la solution générale de l'équation homogène par une fonction.

On en déduit la formule générale (formule de Duhamel)

$$u(t) = e^{tA} u_{0,0} + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

8.3 Lemme de Gronwall

8.3.1 Inéquations différentielle

Supposons qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ vérifie

$$u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t),$$

avec a et $b \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$. On multiplie chacun des membres de l'inégalité par le nombre strictement positif

$$e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

et on en déduit

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} u(t) \right) \leq e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} b(t),$$

d'où, en intégrant

$$e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} u(t) - u(t_0) \leq \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds,$$

et finalement

$$u(t) \leq u(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau) d\tau} b(s) ds.$$

8.3.2 Inéquations intégrales

Lemme 2 Lemme de Gronwall. Soient a et $c \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$, où $T > 0$. On suppose de plus la fonction a à valeurs positives. Si $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$ vérifie

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds,$$

quel que soit $t \in [0, T]$, alors

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} ds.$$

Preuve. Faite en cours.

8.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $f : I \times U \rightarrow E$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un espace de Banach E .

Théorème 28 Soit $f \in \mathcal{C}(I \times U; E)$, on suppose de plus qu'il existe un voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et $L > 0$, tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

On a alors

1. *Existence* : il existe $\tau > 0$ et $u \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; U)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' &= f(t, u), \\ u(t_0) &= u_0. \end{cases}$$

2. *Unicité* : si v est une autre solution, elle coïncide avec u sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

3. si de plus f est de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, alors u est de classe \mathcal{C}^{r+1} .

8.5 Solutions maximales

Pour cete section, on suppose que $f : I \times U \rightarrow E$ est une fonction continue et localement lipschitzienne en tout point $(t_0, u_0) \in I \times U$, c'est à dire qu'il existe un voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Lemme 3 Si $u_1 \in \mathcal{C}^1(J_1; U)$ et $u_2 \in \mathcal{C}^1(J_2; U)$ sont deux solutions de l'équation différentielle

$$u' = f(t, u),$$

sur des intervalles J_1, J_2 respectivement, et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors

$$u_1(t) = u_2(t),$$

pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

Ce lemme montre qu'il existe un plus grand intervalle J sur lequel le problème de Cauchy du paragraphe précédent admet une solution, et que cette solution est unique. Cette solution est appelée solution maximale. Par définition on ne peut pas la prolonger à $I \setminus J$. Lorsque $J = I$ on dit que cette solution est globale.

Théorème 29 Soit $u \in \mathcal{C}^1(J; U)$ une solution maximale de $u' = f(t, u)$. Notons b la borne supérieure de I et β la borne supérieure de J . Alors, soit $\beta = b$, soit u sort de tout compact de U , autrement dit, pour tout compact $K \subset U$, il existe $\eta < \beta$ tel que

$$u(t) \in U \setminus K,$$

pour tout $t \geq \eta$, avec $t \in J$. Et on a le résultat analogue pour les bornes inférieures.

Lemme 4 Supposons que f soit continue, bornée et lipschitzienne par rapport à x dans $[\underline{t} - 2\underline{\tau}, \underline{t} + 2\underline{\tau}] \times \overline{B}(\underline{u}, 2R)$ pour $\underline{\tau} > 0$ et $R > 0$. Alors il existe $\tau \in]0, \underline{\tau}]$ tel que pour tout $(t_0, u_0) \in [\underline{t} - \underline{\tau}, \underline{t} + \underline{\tau}] \times \overline{B}(\underline{u}, R)$, la solution maximale du problème de Cauchy du paragraphe précédent soit définie sur un intervalle contenant $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.