FORMULAIRE DE TRIGONOMETRIE

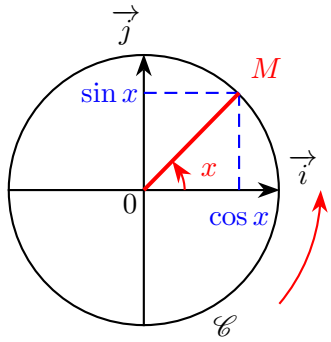
I. Cosinus et sinus d'un réel.

1. Définition :

Le plan étant muni d'un repére orthonormé direct $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on considére le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

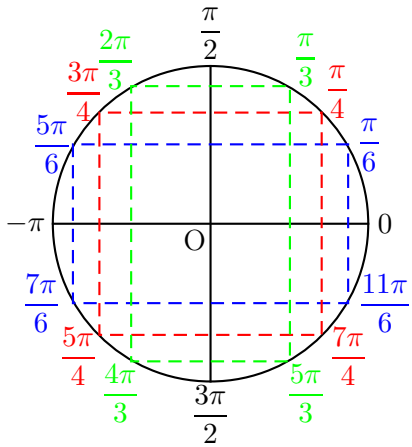
Pour tout réel x, le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}\,,\,\overrightarrow{OM}\right) = x\ rad$ a pour :

- abscisse $\cos x$
- ordonnée $\sin x$



2. Cosinus et sinus d'angles particuliers :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0



II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus.

1. Périodicité :

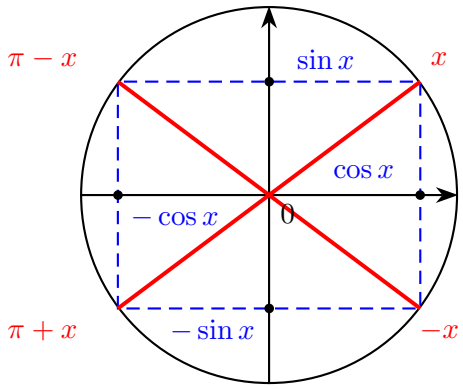
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\cos(x + 2k\pi) = \cos x}$ et $\boxed{\sin(x + 2k\pi) = \sin x}$.

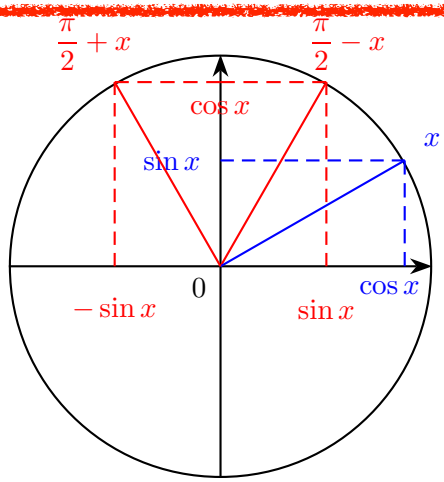
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

2. Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$





3. Formules d'addition :

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

4. Formules de duplication et linéarisation :

Pour tout réel a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

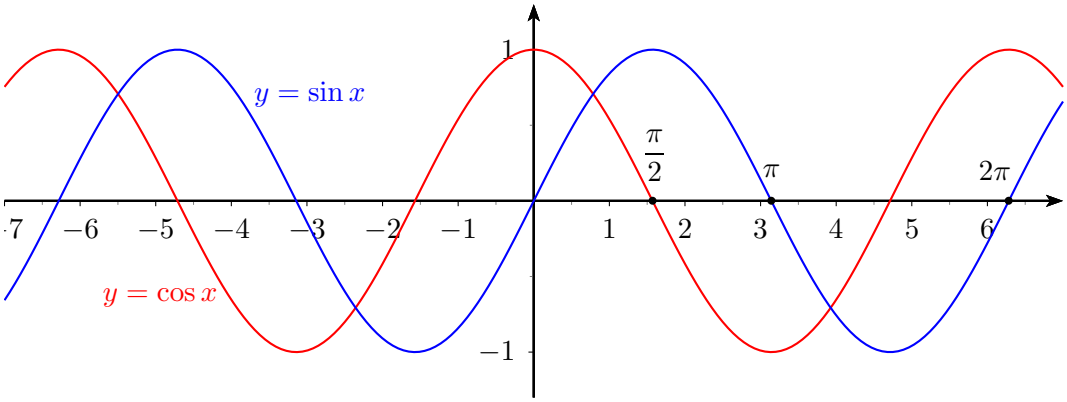
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

III. Etude des fonctions cosinus et sinus.

1. Dérivée :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
♣ si $f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$.
♣ si $g(x) = \sin x$ alors $g'(x) = \cos x$.

2. Courbes représentatives :



Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad \tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \dfrac{\cos(3a)+3\cos(a)}{4}$ $\qquad \sin^3(a) = \dfrac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{4}$ $\qquad \tan^3(a) = \dfrac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{\cos(3a)+3\cos(a)}$

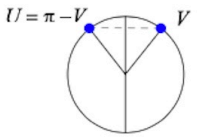
Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \qquad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)] \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

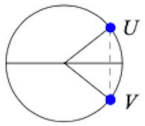
$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = -V\ [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V\ [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \iff U = V\ [\pi]$$