Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Analyse IV

Série n1 :
Rappels : comparaison locale, limsup, liminf, structure de $\mathbb{R}$, suites dans $\mathbb{R}$, suites dans $\mathbb{C}$

Corrigé des exercices I et II

Exercice I : Structure de $\mathbb{R}$

1. *Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.*

   (a) *Soit $P = AB = \{x = ab,\ a \in A,\ b \in B\}$. Est-ce que $\sup(P)$ existe ? Si oui, est-ce que $\sup(P) = \sup(A)\sup(B)$?*

   Réponse : En général, $\sup(P)$ n'existe pas. La raison principale pour cette anomalie est que A et B ne sont supposées que majorées. Une fois que ce constat est fait, on peut assez rapidement trouver des exemples en profitant des changements de signe pour transformer des ensembles qui ne sont pas minorés en des ensembles qui ne sont pas majorés. Explicitons cette idée générale.

   On pose $A = \mathbb{R}_-$ et $B = -1$. Ces deux ensembles sont majorés, sans que par contre A soit minoré. Or, $AB = \mathbb{R}_+$, un ensemble qui n'est pas majoré, qui n'a donc pas de borne supérieure.

   Remarques : *Comme ceci arrive souvent en mathématiques, on peut renforcer les hypothèses et aboutir à des conclusions plus générales dans un contexte plus restreint que celui de ce point. En effet, vous pouvez vous exercer à démontrer l'énoncé suivant :*

   Si A et B sont deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(AB)$ existe, et la valeur de celle-ci est parmi les suivantes :
   $$\inf(A)\inf(B), \inf(A)\sup(B), \sup(A)\inf(B), \sup(A)\sup(B).$$

   (b) *Soit $S = A + B = \{x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Est-ce que $\sup(S)$ existe ? Si oui, est-ce que $\sup(P) = \sup(A) + \sup(B)$?*

   Réponse : Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$. Par conséquent S est un ensemble majoré, et il s'ensuit que $\sup(S)$ existe. La même remarque implique $\sup(S) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

   En ce qui concerne l'inégalité $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(S)$, on se souvient des propriétés des bornes supérieures qui impliquent l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formées respectivement par des éléments de A et de B, qui tendent vers $\sup(A)$ et $\sup(B)$. En particulier, la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup(A) + \sup(B)$. Si $\sup(S) < \sup(A) + \sup(B)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup(S) < a_n + b_n$. Cette absurdité contredit la définition d'une borne supérieure.

(c) *Soit* $-A = \{-a, a \in A, \}$. *Montrer que* $-A$ *admet une borne* inf *et que* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Réponse : Pour tout $a \in A$ et tout $M \in \mathbb{R}$, $a \leq M$ si et seulement si $-M \leq -a$. Par conséquent, $-A$ est minoré, et il s'en ensuit que $\sup(-A)$ existe. Posons maintenant $M = \sup(A)$. Nous venons de constater que $-M$ minore $-A$. Notre remarque initiale montre aussi que si M' minore $-A$, alors $-M'$ majore A, ce qui implique que $M \leq -M'$, soit encore $M' \leq -M$. Ainsi, $-M = \inf(-A)$.

2. (a) *Montrer que pour tous* $q_1,\ q_2 \in \mathbb{Q}$ *tels que* $q_1 < q_2$, *il existe* $q_3 \in \mathbb{Q}$ *tel que* $q_1 < q_3 < q_2$.

Réponse : Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. On peut supposer que $0 \leq q_1 < q_2$ ou $q_1 < q_2 \leq 0$. Sinon, on est dans le cas $q_1 < 0 < q_2$ et 0 fait la tâche. Il suffit d'étudier le premier cas, le deuxième se réduisant au premier après multiplication par -1.

Chaque q_i $(i \in \{1, 2\})$ est de la forme $\frac{a_i}{b_i}$ avec a_i et b_i premiers entre eux et b_i non nul : $0 \leq \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Ceci équivaut à $a_1b_2 < a_2b_1$ et à $\frac{a_1b_2}{b_1b_2} < \frac{a_2b_1}{b_1b_2}$. En particulier, $\frac{a_1b_2+1}{b_1b_2} \leq \frac{a_2b_1}{b_1b_2} = q_2$. On pose $q_3 = q_1 + \frac{1}{2b_1b_2}$. Alors, $q_3 = \frac{a_1b_2}{b_1b_2} + \frac{1}{2b_1b_2} < \frac{a_1b_2}{b_1b_2} + \frac{1}{b_1b_2} \leq \frac{a_2b_1}{b_1b_2}$. Ceci montre que $q_3 < q_2$. L'inégalité $q_1 < q_3$ découle de la définition de q_3.

(b) *Montrer que pour tout* $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *et pour tout* $q_1 \in \mathbb{Q}$ *tels que* $q_1 < r$ *il existe* $q_2 \in \mathbb{Q}$ *tel que* $q_1 < q_2 < r$.

Réponse : Soient q_1 et r comme dans l'énoncé. Par définition des réels, $r = \sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$. L'existence de q_2 découle de la définition de $\sup$.

(c) *Soit* $M_1 \in \mathbb{Q}$. *Montrer que si* $M_1 < \sqrt{2}$, *il existe* $M_2 \in \mathbb{Q}$ *tel que* $M_1 < M_2 < \sqrt{2}$ *et si* $M_1 > \sqrt{2}$, *il existe* $M_2 \in \mathbb{Q}$ *tel que* $M_1 > M_2 > \sqrt{2}$.

Réponse : La réponse est similaire à celle du point précédent.

(d) *En déduire que* $E = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x^2 < 2\}$ *n'admet pas de borne sup dans* $\mathbb{Q}$.

Réponse : On constate que $x \in E$ si et seulement si $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. La réponse découle du point précédent.

Exercice II : Suites dans $\mathbb{R}$

1. *On considère une suite réelle vérifiant : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ *où* $f : x \mapsto (x + 2/x)/2$

(a) *Déterminer les réels* l *vérifiant* $l = f(l)$.

Réponse : Pour $l \in \mathbb{R}^*$, $f(l) = l$ si et seulement si $l^2 + 2 = 2l^2$. On en déduit rapidement que $l = \pm\sqrt{2}$.

(b) *Montrer que si $x > \sqrt{2}$ alors $f(x) > \sqrt{2}$ et si $x < -\sqrt{2}$ alors $f(x) < -\sqrt{2}$.*

Réponse : La dérivée de f est la fonction $f'(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $f'(x) > 0$ si et seulement si $x^2 > 2$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$. Comme $x = \pm\sqrt{2}$ sont deux valeurs fixes de f, la croissance de celle-ci à droite de $\sqrt{2}$ et à gauche de $-\sqrt{2}$ entraîne que si $x > \sqrt{2}$, alors $f(x) > \sqrt{2}$, et si $x < -\sqrt{2}$, alors $f(x) < -\sqrt{2}$.

(c) *Montrer que si $u_0 = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée de nombres rationnels, et que si $u_0 = -2$, c'est une suite croissante et majorée.*

Réponse : Si $u_0 = 2$, alors $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2} < u_0$. Comme f est croissante, en utilisant le raisonnement par réccurence, on déduit de cette première inégalité que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{i+1} < u_i$. La suite est minorée parce que pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, $f(r) = \left(r + \frac{2}{r}\right) \frac{1}{2} > 0$. La suite est formée par des rationnels puisqu'on commence par $u_0 = 2$, qui est rationnel, et qu'on calcule le membre suivant en utilisant des sommes et des produits, opérations qui, à partir des rationnels, produisent des rationnels.

Un raisonnement symétrique (exercice) répond à la question quand $u_0 = -2$.

(d) *Montrer que si $u_0 = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.*

Réponse : On suppose $u_0 = 2$. Alors, d'après le point (c), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l. Comme f est une fonction continue, $l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$. On déduit que $l = \sqrt{2}$.

2. (a) *Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui soit de Cauchy mais qui n'ait pas de limite dans $\mathbb{Q}$.*

Réponse : Toute suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ est de Cauchy mais sans limite dans $\mathbb{Q}$.

(b) *Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui soit décroissante et minorée mais qui n'ait pas de limite dans $\mathbb{Q}$.*

Réponse : Toute suite de rationnels qui décroît vers $\sqrt{2}$ est une réponse à la question.