

Interrogation écrite no. 1 :

Exercice 1.

(Question de cours:) Exprimer la différentielle d'une fonction n -linéaire continue Φ (on pensera à bien définir les espaces de départ, d'arrivée et les normes associées).

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(f) = \int_0^1 x(1-x)f(x) dx, \quad \forall f \in E.$$

Il est facile de voir que Φ est linéaire et continue. Quelle est sa norme?
(entourer la bonne réponse)

- (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{4}$ (e) 1

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$,

$$E = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note E_m l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à m :

$$E_m = \{P \in E, P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}.$$

(remarquons que E_m est un sous-espace vectoriel de E .)

Pour tout $P \in E$ donné par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

(b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On munit E_m de la même norme que E . Considérons l'application bilinéaire $\Phi_m : E_m \times E_m \rightarrow E$ donnée par

$$\Phi_m(P, Q) = P \cdot Q, \quad \forall P, Q \in E_m$$

où $P \cdot Q$ désigne le produit des polynômes P et Q . Montrer que Φ_m est continue et calculer sa norme.

Interrogation écrite no. 1 :

Exercice 1.

(Question de cours:) Donner la différentielle d'une application f définie sur un espace produit en fonction de ses différentielles partielles (on pensera à bien définir les espaces de départ et d'arrivée de l'application).

Exercice 2.

Soit $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application $\psi : F \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\psi(f) = \int_0^1 y(1 - y^2)f(x) dx, \quad \forall f \in E.$$

Il est facile de voir que ψ est linéaire et continue. Quelle est sa norme?
(entourer la bonne réponse)

- (a) 0 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) 1 (e) $\frac{1}{4}$

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$,

$$E = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note E_m l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à m :

$$E_m = \{P \in E, P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}.$$

(remarquons que E_m est un sous-espace vectoriel de E .)

Pour tout $P \in E$ donné par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On munit E_m de la même norme que E . Soit $Q \in E$ donné par $Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}$. Considérons l'application linéaire $\Phi_m : E_m \rightarrow E$ donnée par

$$\Phi_m(P) = P \cdot Q, \quad \forall P \in E_m$$

où $P \cdot Q$ désigne le produit des polynômes P et Q . Montrer que Φ_m est continue et calculer sa norme.

Corrigé du test n°1 du 23 mars 2011 (versions 1 & 2)

- Ex1: voir cours

- Ex2: (version 1): $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 x(1-x) dx = \|f\|_\infty (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6} \|f\|_\infty$

Donc $\|\phi\| \leq \frac{1}{6}$.

Si $f \equiv 1$ alors $|\phi(f)| = \frac{1}{6} \|f\|_\infty = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Réponse (b)

(version 2): $\int_0^1 y(1-y^2) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Réponse (c)

- Ex3: a. Facile (à faire)

b. (version 1)

Si $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ et $Q = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

$$\begin{aligned} \phi_m(P, Q) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots + (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0) x^m + \dots + a_m b_m x^{2m} \\ &= \sum_{k=0}^{2m} c_k x^k \end{aligned}$$

$$|c_0| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$$

$$|c_1| \leq 2\|P\| \cdot \|Q\|$$

$$|c_m| \leq (m+1) \|P\| \cdot \|Q\| \rightarrow \text{c'est le maximum}$$

$$|c_{2m}| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$$

$$\text{Alors } \|\phi_m(P, Q)\| \leq (m+1) \|P\| \cdot \|Q\| \text{ donc } \|\phi_m\| \leq m+1$$

Ensuite prendre $P=Q=1+x+\dots+x^m$

$$\phi_m(P, Q) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (m+1)x^m + mx^{m+1} + \dots + x^{2m}$$

$$\|\phi_m(P, Q)\| = m+1 \text{ et } \|P\| = \|Q\| = 1$$

$$\text{Donc } \|\phi_m\| = m+1$$

(version 2)

Si $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

$$\begin{aligned} \phi_m(P) &= a_0 + (a_0 + a_1) x + (a_0 + a_1 + a_2) x^2 + \dots \\ &\quad + (a_0 + \dots + a_{m-1}) x^{m-1} + (a_1 + a_2 + \dots + a_m) x^m + \dots + a_m x^{2m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2m-1} c_k x^k \end{aligned}$$

$$|c_0| \leq \|P\|, |c_1| \leq 2\|P\| \dots |c_{m-1}| \leq m\|P\|, |c_m| \leq m\|P\| \leftarrow \text{maximum}$$

(1)

$$\dots |c_{2m-1}| \leq \|P\|$$

$$\text{Also } \|\phi_m(P)\| \leq m\|P\| \Rightarrow \|\phi_m\| \leq m$$

Prendre $P = 1+x+\dots+x^m$ on obtient alors

$$\|\phi_m\| = m.$$

□