

Interrogation écrite no. 3 :

Exercice 1.

(Question de cours)

- a) Énoncer le théorème d'inversion globale
- b) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 2.

On admet qu'au voisinage du point $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ les solutions du système

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{cases}$$

vérifient $(x, y) = f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ où f est une fonction C^1 dans un voisinage de 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f'(1) = (-1, 0)$.

Exercice 3.

Soit $E = \{y \in C^2([0, 1]; \mathbb{R}), y(0) = 0, y'(0) = 0\}$. On admet que E , muni de la norme

$$\|y\|_E = \sup_{[0,1]} |y''| + \sup_{[0,1]} |y'| + \sup_{[0,1]} |y|,$$

est un espace de Banach. On considère par ailleurs $F = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit l'application $\varphi : E \rightarrow F$ définie par $\varphi(y) = y'' + yy'$.

- a) Montrer que φ est de classe C^1 sur E et calculer $d\varphi_0$.
- b) Montrer que $d\varphi_0$ est un isomorphisme de E dans F .
- c) En déduire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour toute application f appartenant à F et vérifiant $\sup_{[0,1]} |f| < \epsilon$ il existe une solution à l'équation différentielle

$$y'' + yy' = f$$

qui vérifie $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Interrogation écrite no. 3 – Corrigé

Exercice 1.

(Question de cours)

- a) Enoncer le théorème d'inversion globale
- b) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

Corrigé : voir le cours !

Exercice 2.

On admet qu'au voisinage du point $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ les solutions du système

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{cases}$$

vérifient $(x, y) = f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ où f est une fonction C^1 dans un voisinage de 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f'(1) = (-1, 0)$.

Corrigé : On remplace dans le système x et y par $f_1(z)$ et $f_2(z)$ respectivement. Puis on dérive par rapport à z et on obtient.

$$\begin{cases} 3f_1'(z)f_1^2(z) + 3f_2'(z)f_2^2(z) + 3z^2 &= 0 \\ 2f_1'(z)f_1(z) + 2f_2'(z)f_2(z) + 2z &= 0 \end{cases}$$

On sait que $f_1(1) = 1$ et $f_2(1) = -1$ puisque le point $(1, -1, 1)$ est solution du système. Il suffit de remplacer z par 1 dans le système pour obtenir

$$\begin{cases} 3f_1'(1) + 3f_2'(1) + 3 &= 0 \\ 2f_1'(1) - 2f_2'(1) + 2 &= 0 \end{cases}$$

dont la solution est $f'(1) = (-1, 0)$.

Exercice 3.

Soit $E = \{y \in C^2([0, 1]; \mathbb{R}), y(0) = 0, y'(0) = 0\}$. On admet que E , muni de la norme

$$\|y\|_E = \sup_{[0,1]} |y''| + \sup_{[0,1]} |y'| + \sup_{[0,1]} |y|,$$

est un espace de Banach. On considère par ailleurs $F = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit l'application $\varphi : E \rightarrow F$ définie par $\varphi(y) = y'' + yy'$.

a) Montrer que φ est de classe C^1 sur E et calculer $d\varphi_0$.

Pour tout z de E on a $\varphi(y+z) = (y+z)'' + (y+z)(y+z)' = y'' + y'y + z'' + zy' + yz' + zz' = \varphi(y) + z'' + zy' + yz' + zz'$.

L'application $z \mapsto z'' + zy' + yz'$ est linéaire de E dans F . Elle est aussi continue car $\|z'' + zy' + yz'\|_F = \|z'' + zy' + yz'\|_\infty \leq \|z''\|_\infty + \|y'\|_\infty \|z\|_\infty + \|y\|_\infty \|z'\|_\infty \leq (1 + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty) \|z\|_E$

On a par ailleurs $\|zz'\|_F \leq \|z\|_\infty \|z'\|_\infty \leq \|z\|_E^2$ donc $zz' = o(\|z\|_E)$. On en déduit que $z \mapsto z'' + zy' + yz'$ est la différentielle $d\varphi_y$ de φ en y . Montrons que cette différentielle est continue sur E . On va donc montrer que si $\|\tilde{y} - y\|_E \rightarrow 0$ alors $\|d\varphi_{\tilde{y}} - d\varphi_y\|_{\mathcal{L}(E,F)} \rightarrow 0$. On calcule que pour tout z de E

$$\|d\varphi_{\tilde{y}}(z) - d\varphi_y(z)\|_F = \|z(y - \tilde{y})' + z'(y - \tilde{y})\|_F \leq \|z\|_\infty \|y' - \tilde{y}'\|_\infty + \|z'\|_\infty \|y - \tilde{y}\|_\infty \leq 2\|z\|_E \|y - \tilde{y}\|_E$$

d'où

$$\|d\varphi_{\tilde{y}} - d\varphi_y\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq 2\|y - \tilde{y}\|_E.$$

On a ainsi montré que l'application $y \mapsto d\varphi_y$ est lipschitzienne donc continue sur E .

b) Montrer que $d\varphi_0$ est un isomorphisme de E dans F . Pour tout z dans E , $d\varphi_0(z) = z''$. C'est une application linéaire et continue de E dans F (la continuité découle de l'inégalité $\|z''\|_\infty \leq \|z\|_E$). C'est en outre une application inversible car si $y \in F$ alors l'application $z(t) = \int_0^t \int_0^u y(v) dv du$ est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et vérifie $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$. C'est donc un élément de E .

c) En déduire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour toute application f appartenant à F et vérifiant $\sup_{[0,1]} |f| < \epsilon$ il existe une solution à l'équation différentielle

$$y'' + yy' = f$$

qui vérifie $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

On considère l'application $\psi(f, y) = y'' + yy' - f$ de $F \times E$ à valeurs dans F . On a $\psi(0, 0) = 0$. La différentielle de ψ par rapport à la variable y en un point (f, y) coïncide avec l'application $d\psi_y$ qui ne dépend pas de f et $y \mapsto d\varphi_y$ est C^1 sur E . Donc l'application $(f, y) \mapsto d\varphi_y$ est C^1 sur $F \times E$. La différentielle de ψ par rapport à la variable f est l'application identité sur E et $(f, y) \mapsto \text{Id}_E$ est bien sûr C^1 sur $F \times E$. On en déduit que ψ est de classe C^1 sur $F \times E$. Enfin, on a $d_2\psi(0, 0) = d\psi_0$ qui est un isomorphisme de E dans F . Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $(0, 0)$ dans $F \times E$, un voisinage W de 0 dans E et une fonction $H : F \rightarrow E$ de classe C^1 tels que

$$(f, y) \in U, \psi(f, y) = 0 \Leftrightarrow f \in W, y = H(f).$$

Ceci prouve qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $f \in F$ avec $\|f\|_\infty < \epsilon$ alors $f \in W$ donc la fonction y définie par $y = H(f)$ est dans E et vérifie $\psi(f, y) = 0$ c'est-à-dire $y'' + yy' = f$.