GROUPES DE KAC-MOODY DÉPLOYÉS ET PRESQUE DÉPLOYÉS

1. Situation

A. Théorie de Kac-Moody (déployée). En 1967, V. Kac et R. Moody définissent indépendamment une famille d'algèbres de Lie généralisant les algèbres de Lie semi-simples complexes. Cette généralisation s'appuie sur le dévissage complet de ces dernières, obtenu par Serre quelques années auparavant. Une question naturelle est alors de chercher quels groupes peuvent «intégrer» ces objets, comme les groupes de Lie intègrent les algèbres de Lie réelles. Un certain nombre de définitions ont été proposées (Kac-Peterson, Mathieu, Tits...); on a retenu celle de J. Tits datant de 1987, parce qu'elle présente des propriétés combinatoires remarquables. Elle généralise une présentation des groupes semi-simples (déployés) due à R. Steinberg.

Exemple. — Pour tout corps $\mathbf{K}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}[t,t^{-1}])$ est un groupe de Kac-Moody affine.

B. Théorie relative des groupes algébriques. On sait qu'en géométrie algébrique ou pour les groupes de Lie, les classifications sont plus simples sur les corps algébriquement clos. Les objets qu'on a décrit plus haut rentrent dans ce cadre, dit *déployé.* Mais une théorie des groupes algébriques sur des corps quelconques existe, c'est la théorie de Borel-Tits (1965). Elle présente une approche unifiée de groupes classiques non concernés auparavant (groupes unitaires, algèbres centrales simples...). Il est donc naturel de se poser le problème suivant.

Problème. — *Développer un analogue de théorie de Borel-Tits pour les groupes de Kac-Moody.*

J.-Y. Hée a défini des groupes de Kac-Moody non déployés dans l'esprit des torsions de groupes à la Steinberg; G. Rousseau a développé la théorie des groupes de Kac-Moody presque déployés en caractéristique 0. On va parler de ce même type de groupe en caractéristique quelconque.

C. Outils et sous-produits: les immeubles. Pour certaines situations de théorie des groupes, les *immeubles* sont de précieux outils d'étude. D'une certaine façon, ces espaces réalisent le renversement du programme d'Erlangen, en associant à un groupe une géométrie sur laquelle son action est bien comprise et qui permet de le décomposer. Inversement, la production de nouveaux specimens de groupes agissant sur des immeubles peut être vue comme un moyen d'obtenir de nouvelles familles de géométries singulières. Voici quelques situations où les immeubles se sont révélés utiles.

Applications. — 1. Les immeubles (euclidiens) associés aux groupes réductifs sur les corps locaux sont considérés comme les analogues non archimédiens des espaces symétriques riemanniens du cas réel.
2. L'immeuble (sphérique) à l'infini d'un espace symétrique (riemannien non compact) est un ingrédient de la preuve par Mostow de la rigidité forte en rang supérieur.

2. Immeubles et théorie de Kac-Moody

A. Immeubles. Considérons le pavage du plan $\mathbf{R}^2$ par des triangles équilatéraux. De cette situation, on retient les propriétés et définitions suivantes.

(i) Le complexe simplicial est étiqueté. On appelle *chambres* les simplexes maximaux, et on note W le groupe des automorphismes préservant les étiquettes.

(ii) Il existe une famille dénombrable d'hyperplans – les *murs*, par rapport auxquels sont définies des involutions – les *réflexions.* Les demi-espaces correspondants seront appelés les *racines.*
(iii) W est engendré par les réflexions relatives aux murs délimitant une chambre fixée.
(iv) W est simplement transitif sur les chambres.

Le point de départ de la définition des immeubles provient de la généralisation de ces propriétés à une plus vaste classe de groupes.

Fait. — *À tout groupe de Coxeter W est associé un complexe simplicial jouissant des propriétés ci-dessus.*

Exemples. — Découpage de la droite $\mathbf{R}$ par les segments d'extrémités entières pour le groupe diédral infini D_∞, pavage de $\mathbf{R}^2$ par des triangles équilatéraux, et – à condition de remplacer «simplicial» par «cellulaire» – pavage du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par un r-gone régulier à angles droits ($r \geq 5$).

Définition. — *Un* immeuble *est un complexe simplicial dans lequel on distingue un ensemble de sous-complexes – les* appartements *– tous isomorphes à la géométrie décrite ci-dessus, et satisfaisant les axiomes d'incidence suivants.*

(i) *Deux* facettes *(i.e., simplexes) sont toujours contenues dans un appartement.*
(ii) *Deux appartements sont toujours isomorphes par une flèche simpliciale fixant leur intersection.*

Le groupe W décrivant la géométrie des appartements est appelé le groupe de Weyl *de l'immeuble.*

Exemples. — Les immeubles dont les appartements sont modelés sur les exemples précédents font partie de la classe des *arbres*, des *immeubles euclidiens* et des *immeubles hyperboliques fuchsiens* respectivement.

B. Dictionnaire immeubles/groupes. On sait quels axiomes exiger d'un groupe abstrait pour qu'il donne naissance à un immeuble sur lequel il opère naturellement: c'est la combinatoire de *système de Tits,* ou *BN-paire.* Ces axiomes permettent des preuves abstraites et unifiées de résultats classiques (décomposition de Bruhat...) sur les groupes de Lie par exemple. Réciproquement, on sait quelles conditions exiger d'une action sur un immeuble pour que le groupe en question possède cette fameuse structure de BN-paire. On obtient ainsi un dictionnaire (non univoque) entre systèmes de Tits et immeubles, qui s'établit à un niveau purement combinatoire. On va voir que les groupes de Kac-Moody sont concernés par cette correspondance.

C. Groupes de Kac-Moody. Fixons un groupe de Kac-Moody G, déterminé notamment par un corps $\mathbf{K}$ et une *matrice de Cartan généralisée* $A := [A_{st}]_{s,t \in S}$. A est indexée par un ensemble fini S; elle vérifie par définition

$$A_{ss} = 2,\ A_{st} \leq 0 \quad \forall s \neq t \text{ et } A_{st} = 0 \Longleftrightarrow A_{ts} = 0.$$

Le premier point remarquable est que les groupes de Kac-Moody jouissent de propriétés qui raffinent considérablement la combinatoire des systèmes de Tits. On parle d'*axiomes* (RGD) – pour «Root Group Datum» . La géométrie associée est un *immeuble jumelé*, formé d'une paire $\{\mathcal{I}_+;\mathcal{I}_-\}$ d'immeubles isomorphes, conventionnellement un pour chaque signe.

« Jumelé » signifie qu'il existe une relation d'opposition entre chambres (resp. entre appartements) de signes opposés.

Piège. — Alors qu'une chambre admet de nombreuses opposées, à chaque appartement est attaché un unique opposé.

Exemple. — Les immeubles du jumelage de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ sont les immeubles de Bruhat-Tits associés aux groupes de Lie p-adiques $\mathrm{SL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t)\!)\big)$ et $\mathrm{SL}_n\big(\mathbf{F}_q(\!(t^{-1})\!)\big)$. Ici le groupe de Weyl est un groupe de réflexions affine.

Remarque. — $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ est aussi un groupe $\{0;\infty\}$-arithmétique sur un corps de fonctions. Cette analogie est elle aussi fructueuse pour l'étude des groupes de Kac-Moody sur des corps finis.

3. Formes presque déployées. Descente galoisienne

On se fixe un corps $\mathbf{K}$, dont $\mathbf{K}_s$ est une clôture séparable; Γ désigne le groupe de Galois correspondant $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$. On choisit aussi G un groupe de Kac-Moody défini sur $\mathbf{K}_s$.

Problème. — *On ne connaît pas de structure algébro-géométrique globale sur un groupe de Kac-Moody défini comme ci-dessus.*

On a choisi de substituer à une telle structure l'usage d'une représentation

$$\mathrm{Ad}:\, G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}_s}),$$

à valeurs dans une $\mathbf{K}_s$-algèbre $\mathcal{U}_{\mathbf{K}_s}$. On parle de *représentation adjointe.* En caractéristique 0, $\mathcal{U}_{\mathbf{K}_s}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Kac-Moody définie par les mêmes données que G, mais ce n'est pas le cas en caractéristique positive. S'il existait un calcul différentiel algébrique sur G, $\mathcal{U}_{\mathbf{K}_s}$ serait l'*algèbre des distributions supportées à l'origine* de ce groupe; elle est définie au moyen de puissances divisées. Pour les groupes algébriques, il est classique que les algèbres enveloppantes ne rendent pas autant de services que les algèbres de distributions.

Les $\mathbf{K}$-formes de G sont définies en termes d'actions galoisiennes compatibles sur G et sur $\mathcal{U}_{\mathbf{K}_s}$. Modulo quelques hypothèses techniques (superflues dans de nombreux cas), les principales conditions requises pour que ces Γ-actions définissent une $\mathbf{K}$-*forme presque déployée* de G sont les suivantes.

Conditions. — (i) Γ-*équivariance de la représentation adjointe.*
(ii) Γ-*stabilité de l'immeuble de chaque signe.*

On désignera par $G(\mathbf{K})$ le groupe G^Γ des points *rationnels* – c'est-à-dire Galois-fixes. Le résultat principal concernant les $\mathbf{K}$-formes presque déployées des groupes de Kac-Moody, est un théorème de structure combinatoire.

Théorème (Descente galoisienne). — *Soit G un groupe de Kac-Moody presque déployé sur $\mathbf{K}$. Alors:*

(i) *Les points Galois-fixes dans l'immeuble jumelé de G forment encore un immeuble jumelé – qu'on appellera* immeuble jumelé relatif.
(ii) *Le groupe $G(\mathbf{K})$ vérifie les axiomes* (RGD) *pour un choix naturel de sous-groupes suggéré par la géométrie d'une paire d'appartements opposés dans l'immeuble jumelé relatif.*
(iii) *Les tores $\mathbf{K}$-déployés maximaux sont conjugués sous l'action de $G(\mathbf{K})$.* $\square$

Remarque. — La notion de forme presque déployée est due à G. Rousseau, qui a prouvé le théorème de descente galoisienne en caractéristique 0. Pour obtenir des géométries localement finies, il fallait travailler sur des corps finis.

4. Courbure négative et convexité

Décompositions de Lévi et structures algébriques

A. Deux réalisations géométriques. Les outils employés sont de nature essentiellement géométrique; ils reposent sur les notions de *courbure négative* et de *convexité.* À chacune d'elle correspond une réalisation géométrique spécifique, respectivement la réalisation *métrique* et la réalisation *conique.*

Théorie singulière de la courbure négative. D'après M. Davis et G. Moussong, tout immeuble admet une réalisation métrique CAT(0) qui généralise celle des immeubles euclidiens. Ce résultat permet d'appliquer le théorème de point fixe de Bruhat-Tits.

Réalisation conique. C'est une autre réalisation où les appartements sont représentés par le *cône de Tits* du groupe de Weyl. Elle est particulièrement adaptée aux raisonnements de convexité, et fait apparaître les facettes non sphériques.

B. Décompositions de Lévi. Appelons *équilibrée* une partie d'un jumelage rencontrant l'immeuble de chaque signe, contenue dans une paire d'appartements opposés, et recouverte par un nombre fini de facettes sphériques. Le fixateur d'une telle partie Ω est appelé un *petit sous-groupe.* Des raisonnements de convexité permettent de prouver:

Théorème (Décompositions de Lévi). — *Tout choix d'appartement jumelé contenant* Ω *donne naissance à une décomposition* $\mathrm{Fix}(\Omega) = M \ltimes U$*, où* M *(resp.* U*) est abstraitement isomorphe à un groupe réductif (resp. unipotent).* □

C. Groupes algébriques. L'usage combiné des décompositions de Lévi et de la représentation adjointe fournit:

Théorème (Structures algébriques). — *Tout quotient de petit sous-groupe par son centre est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique.* □

Ainsi, le groupe de Kac-Moody ne possède pas de structure algébro-géométrique globale, mais une large famille de sous-groupes rend possibles des arguments de groupes algébriques.

D. Un argument récurrent. Il consiste à enchaîner les deux étapes suivantes.

Argument. —(i) *Application du théorème de point fixe de Bruhat-Tits dans chaque immeuble pour obtenir une partie équilibrée* Ω*.*
(ii)*Recours à un résultat sur les groupes algébriques pour le petit sous-groupe* $\mathrm{Fix}(\Omega)$*.*

Applications. — 1. Au moyen d'un lemme de Kac et Peterson, on montre qu'un groupe d'image adjointe diagonalisable possède un point fixe dans chaque immeuble. Il suffit alors d'appliquer le théorème classique de conjugaison des sous-groupes de Cartan pour obtenir ce résultat pour les groupes de Kac-Moody.
2. En appliquant cette fois le théorème de point fixe au groupe de Galois, on obtient un petit sous-groupe défini sur $\mathbf{K}$. Un théorème de Grothendieck affirme l'existence d'un sous-groupe de Cartan défini sur $\mathbf{K}$, ce qui se traduit par l'existence d'une paire d'appartements opposés et Galois-stables. On peut alors utiliser des raisonnements de convexité dans le lieu des points fixes sous Galois.

5. Exemples hyperboliques

A. Immeubles hyperboliques jumelés déployés. Considérons le pavage de Poincaré du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par un r-gone à angles droits ($r \geq 5$). D'après M. Bourdon, il existe un unique immeuble $I_{r,q+1}$ satisfaisant les conditions suivantes:

– les appartements sont tous isomorphes à ce pavage;
– le *link* à chaque sommet est le graphe biparti complet de paramètres $(q+1, q+1)$.

L'immeuble $I_{r,q+1}$ participe à un jumelage de groupe de Kac-Moody si et seulement si q est une puissance première (cardinal du corps de base).

B. Arbres jumelés semi-homogènes. Soient $r \geq 5$ un entier impair et $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$ une extension quadratique de corps finis. On choisit G un groupe de Kac-Moody dont les immeubles sont des I_{r,q^2+1}. Pour chaque symétrie de son diagramme de Dynkin, G admet une involution opérant par «Frobenius + symétrie» sur la famille des groupes radiciels; on obtient ainsi une forme quasi-déployée. Pour une symétrie convenable, l'immeuble jumelé du groupe tordu est constitué de deux arbres semi-homogènes de valences $q+1$ et q^2+1.

6. Des réseaux de type arithmétique

On a déjà remarqué que la classe des groupes de Kac-Moody contenait certains groupes arithmétiques sur les corps de fonctions, par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t, t^{-1}])$. On va voir un résultat qui justifie l'analogie du point de vue des groupes discrets.

A. Réseaux exotiques. Soit Λ_q un groupe de Kac-Moody presque déployé sur le corps fini $\mathbf{F}_q$. On note Δ_+ (resp. Δ_-) l'immeuble métrique positif (resp. négatif) qui lui est associé. Aut_+ (resp. Aut_-) est le groupe totalement discontinu de tous les automorphismes de Δ_+ (resp. Δ_-). Quitte à quotienter Λ_q par son centre fini, on peut supposer que son action sur $\Delta_\pm$ est fidèle.

Théorème. — *On note* $\sum_{n\geq 0} d_n t^n$ *la fonction de croissance du groupe de Weyl* W *de* Λ_q. *On suppose que la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{q^n}$ *converge. Alors:*

(i) *Le fixateur dans* Λ_q *d'un point de l'immeuble négatif* Δ_- *est un réseau du groupe* Aut_+.
(ii) *Le groupe* Λ_q *lui-même est un réseau du groupe produit* $\mathrm{Aut}_+ \times \mathrm{Aut}_-$.

Ces réseaux ne sont pas cocompacts.

Ce résultat a aussi été prouvé par L. Carbone et H. Garland.

B. Propriétés classiques. Le théorème ci-dessus pose la question de la pertinence et de la validité des propriétés classiques des sous-groupes discrets des groupes de Lie, réels ou p-adiques. Les analogues de ces derniers sont les groupes d'automorphismes des immeubles de Kac-Moody (localement finis). Plusieurs points argumentent en faveur de cette approche. On pense d'une part aux résultats de type superrigidité pour les groupes d'automorphismes d'espaces métriques CAT(-1), à la propriété de Howe-Moore pour les groupes d'automorphismes d'arbres – *cf.* Burger, Mozes, Lubotzky... et d'autre part aux critères géométriques concernant la propriété (T) de Kazhdan – *cf.* Ballmann, Dymara, Januszkiewicz, Pansu, Swiatkowski, Zuk... La propriété (T) a été mise en évidence pour certains groupes de Kac-Moody dont les appartements sont des pavages d'un espace hyperbolique par un simplexe compact.

Bertrand RÉMY　　　　29 février 2000