Constructions (récentes) de groupes discrets (infinis) simples

Bertrand Rémy
remy@math.univ-lyon1.fr

Université de Lyon
Université Lyon 1
CNRS UMR 5208 – Institut Camille Jordan
Bâtiment Jean Braconnier
43, blvd du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex – France

IRMA, Université de Strasbourg – 24 septembre 2010

Groupes simples

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse. Un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* s'il est stable par les conjugaisons : $\gamma\Delta\gamma^{-1} = \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse. Un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* s'il est stable par les conjugaisons : $\gamma\Delta\gamma^{-1} = \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- C'est la condition qu'il faut pour que l'ensemble Γ/Δ (des classes de Γ modulo Δ) soit naturellement muni, lui aussi, d'une structure de groupe.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse. Un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* s'il est stable par les conjugaisons : $\gamma\Delta\gamma^{-1} = \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- C'est la condition qu'il faut pour que l'ensemble Γ/Δ (des classes de Γ modulo Δ) soit naturellement muni, lui aussi, d'une structure de groupe.
- On dit qu'un groupe est *simple* s'il n'a pas de quotient non trivial, autrement dit de sous-groupe distingué non trivial.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse. Un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* s'il est stable par les conjugaisons : $\gamma\Delta\gamma^{-1} = \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- C'est la condition qu'il faut pour que l'ensemble Γ/Δ (des classes de Γ modulo Δ) soit naturellement muni, lui aussi, d'une structure de groupe.
- On dit qu'un groupe est *simple* s'il n'a pas de quotient non trivial, autrement dit de sous-groupe distingué non trivial. Les groupes simples sont les blocs élémentaires de la théorie des groupes.

Groupes simples

- Dans ce qui suit, Γ désignera toujours un groupe. Rappelons qu'un *sous-groupe* de Γ est une partie non vide et stable par la loi de groupe et le passage à l'inverse. Un sous-groupe Δ de Γ est dit *distingué* s'il est stable par les conjugaisons : $\gamma\Delta\gamma^{-1} = \Delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- C'est la condition qu'il faut pour que l'ensemble Γ/Δ (des classes de Γ modulo Δ) soit naturellement muni, lui aussi, d'une structure de groupe.
- On dit qu'un groupe est *simple* s'il n'a pas de quotient non trivial, autrement dit de sous-groupe distingué non trivial. Les groupes simples sont les blocs élémentaires de la théorie des groupes.
- Exemples : le groupe $\mathcal{A}_n$ des permutations de signature 1 de $n \geqslant 5$ élements, les groupes $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ pour $n \geqslant 2$...

Théorie géométrique des groupes

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;
- (X, d) est un espace métrique.

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;
- (X, d) est un espace métrique.

En pratique, on fait bien sûr des hypothèses supplémentaires sur l'espace X et sur l'action.

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;
- (X, d) est un espace métrique.

En pratique, on fait bien sûr des hypothèses supplémentaires sur l'espace X et sur l'action.

- Par exemple, on peut faire des hypothèses de courbure sur X (mais sans faire de géométrie différentielle !) ;

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;
- (X, d) est un espace métrique.

En pratique, on fait bien sûr des hypothèses supplémentaires sur l'espace X et sur l'action.

- Par exemple, on peut faire des hypothèses de courbure sur X (mais sans faire de géométrie différentielle !) ;
- et on peut supposer que l'action fait du groupe Γ une bonne approximation discrète de l'espace X.

Théorie géométrique des groupes

C'est (en gros) l'étude des actions de groupes $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, où :

- Γ est un groupe infini de *type fini* (c'est-à-dire engendré par une partie finie) ;
- (X, d) est un espace métrique.

En pratique, on fait bien sûr des hypothèses supplémentaires sur l'espace X et sur l'action.

- Par exemple, on peut faire des hypothèses de courbure sur X (mais sans faire de géométrie différentielle !) ;
- et on peut supposer que l'action fait du groupe Γ une bonne approximation discrète de l'espace X.

On reviendra plus précisément sur tous ces points.

Problèmes d'existence et de construction

Problèmes d'existence et de construction

Les groupes ci-dessus sont finis ou non dénombrables.

Problèmes d'existence et de construction

Les groupes ci-dessus sont finis ou non dénombrables. En fait, on aimerait obtenir des groupes simples infinis de type fini, et même un peu mieux.

Problèmes d'existence et de construction

Les groupes ci-dessus sont finis ou non dénombrables. En fait, on aimerait obtenir des groupes simples infinis de type fini, et même un peu mieux. Un groupe Γ est dit de *présentation finie* s'il admet un partie finie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de générateurs, soumis à un nombre fini de relations.

Problèmes d'existence et de construction

Les groupes ci-dessus sont finis ou non dénombrables. En fait, on aimerait obtenir des groupes simples infinis de type fini, et même un peu mieux. Un groupe Γ est dit de *présentation finie* s'il admet un partie finie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de générateurs, soumis à un nombre fini de relations. Autrement dit, on peut décrire Γ comme l'ensemble des mots en les x_i et x_i^{-1}, avec la loi donnée par la concaténation et où l'on écrase certains sous-mots prescrits (en nombre fini).

Problèmes d'existence et de construction

Les groupes ci-dessus sont finis ou non dénombrables. En fait, on aimerait obtenir des groupes simples infinis de type fini, et même un peu mieux. Un groupe Γ est dit de *présentation finie* s'il admet un partie finie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de générateurs, soumis à un nombre fini de relations. Autrement dit, on peut décrire Γ comme l'ensemble des mots en les x_i et x_i^{-1}, avec la loi donnée par la concaténation et où l'on écrase certains sous-mots prescrits (en nombre fini).

Problème

Construire, au moyen de la théorie géométrique des groupes, des groupes infinis, simples et de présentation finie.

Ce dont il est question :

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret).

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret). On dit que l'action est *géométrique* si chaque $\gamma \in \Gamma$ agit par une isométrie de (X, d), et si l'action est *propre* et *cocompacte*.

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X,d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret). On dit que l'action est *géométrique* si chaque $\gamma \in \Gamma$ agit par une isométrie de (X,d), et si l'action est *propre* et *cocompacte*.
- La condition de propreté requiert que pour chaque partie compacte $K \subset X$ l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \ : \gamma K \cap K \neq \varnothing\}$ soit fini.

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret). On dit que l'action est *géométrique* si chaque $\gamma \in \Gamma$ agit par une isométrie de (X, d), et si l'action est *propre* et *cocompacte*.
- La condition de propreté requiert que pour chaque partie compacte $K \subset X$ l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \ : \gamma K \cap K \neq \varnothing\}$ soit fini.
- La condition de cocompacité requiert que l'ensemble des orbites de X modulo Γ soit compact pour la topologie quotient

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret). On dit que l'action est *géométrique* si chaque $\gamma \in \Gamma$ agit par une isométrie de (X, d), et si l'action est *propre* et *cocompacte*.
- La condition de propreté requiert que pour chaque partie compacte $K \subset X$ l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \ : \gamma K \cap K \neq \varnothing\}$ soit fini.
- La condition de cocompacité requiert que l'ensemble des orbites de X modulo Γ soit compact pour la topologie quotient (une boule assez grosse dans X rencontre toutes les Γ-orbites).

Qu'est-ce qu'une action géométrique ?

- Revenons au cadre $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ de la théorie géométrique des groupes (avec Γ discret). On dit que l'action est *géométrique* si chaque $\gamma \in \Gamma$ agit par une isométrie de (X, d), et si l'action est *propre* et *cocompacte*.
- La condition de propreté requiert que pour chaque partie compacte $K \subset X$ l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \ : \gamma K \cap K \neq \varnothing\}$ soit fini.
- La condition de cocompacité requiert que l'ensemble des orbites de X modulo Γ soit compact pour la topologie quotient (une boule assez grosse dans X rencontre toutes les Γ-orbites).
- Exemple : partir d'une variété riemannienne compacte Y et prendre l'action du groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(Y)$ sur le revêtement universel $X = \widetilde{Y}$.

Théorème de Poincaré

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question.

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question. On se donne dans X un polyèdre, disons P, et on suppose que les angles entre faces de codimension 1 sont des sous-multiples entiers de π.

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question. On se donne dans X un polyèdre, disons P, et on suppose que les angles entre faces de codimension 1 sont des sous-multiples entiers de π.
- Prolongeons chacune de ces faces de P en une hypersurface de X et considérons le groupe Γ engendré par la famille finie de réflexions de X ainsi obtenue.

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question. On se donne dans X un polyèdre, disons P, et on suppose que les angles entre faces de codimension 1 sont des sous-multiples entiers de π.
- Prolongeons chacune de ces faces de P en une hypersurface de X et considérons le groupe Γ engendré par la famille finie de réflexions de X ainsi obtenue. Voici un théorème de Poincaré :

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question. On se donne dans X un polyèdre, disons P, et on suppose que les angles entre faces de codimension 1 sont des sous-multiples entiers de π.
- Prolongeons chacune de ces faces de P en une hypersurface de X et considérons le groupe Γ engendré par la famille finie de réflexions de X ainsi obtenue. Voici un théorème de Poincaré :

Théorème

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{Isom}(X)$ est discret ; il est de présentation finie et son action sur X est géométrique.

Théorème de Poincaré

- Partons d'une géométrie-modèle : un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, une sphère $\mathbb{S}^n$ ou un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, et appelons X la géométrie en question. On se donne dans X un polyèdre, disons P, et on suppose que les angles entre faces de codimension 1 sont des sous-multiples entiers de π.
- Prolongeons chacune de ces faces de P en une hypersurface de X et considérons le groupe Γ engendré par la famille finie de réflexions de X ainsi obtenue. Voici un théorème de Poincaré :

Théorème

Le sous-groupe Γ de $\mathrm{Isom}(X)$ est discret ; il est de présentation finie et son action sur X est géométrique.

En fait, on peut dire plus précisément que le groupe Γ appartient à la classe des *groupes de Coxeter*.

Pavages d'espaces symétriques

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.
- Une bonne généralisation pour X est donnée par les *espaces symétriques* (sous-entendus riemanniens non compacts).

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.
- Une bonne généralisation pour X est donnée par les *espaces symétriques* (sous-entendus riemanniens non compacts). On les construit ainsi :

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.
- Une bonne généralisation pour X est donnée par les *espaces symétriques* (sous-entendus riemanniens non compacts). On les construit ainsi : partir d'un groupe de Lie G, simple et non compact, prendre un sous-groupe K, compact maximal, et considérer $X = G/K$ (exemple : $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n)$).

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.
- Une bonne généralisation pour X est donnée par les *espaces symétriques* (sous-entendus riemanniens non compacts). On les construit ainsi : partir d'un groupe de Lie G, simple et non compact, prendre un sous-groupe K, compact maximal, et considérer $X = G/K$ (exemple : $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n)$).
- Voici un théorème dû à A. Borel et G. Harder (1977) :

Pavages d'espaces symétriques

- On peut chercher à compliquer un peu l'espace ambiant X, tout en gardant en tête d'obtenir des pavages de X comme dans le théorème de Poincaré.
- Une bonne généralisation pour X est donnée par les *espaces symétriques* (sous-entendus riemanniens non compacts). On les construit ainsi : partir d'un groupe de Lie G, simple et non compact, prendre un sous-groupe K, compact maximal, et considérer $X = G/K$ (exemple : $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n)$).
- Voici un théorème dû à A. Borel et G. Harder (1977) :

Théorème

Pour tout espace symétrique comme ci-dessus, il existe un groupe Γ qui y opère géométriquement, ce qui implique que Γ est de présentation finie.

Deux classes de groupes

Deux classes de groupes

- Ensuite, on peut se donner en premier lieu un groupe et chercher à lui ajuster une géométrie X munie d'une Γ-action géométrique (ou presque).

Deux classes de groupes

- Ensuite, on peut se donner en premier lieu un groupe et chercher à lui ajuster une géométrie X munie d'une Γ-action géométrique (ou presque).
- Une première classe de groupes intéressants est donnée par les groupes libres F_n, à $n \geqslant 2$ lettres : ce sont les groupes engendrés par n générateurs, soumis à aucune relation.

Deux classes de groupes

- Ensuite, on peut se donner en premier lieu un groupe et chercher à lui ajuster une géométrie X munie d'une Γ-action géométrique (ou presque).
- Une première classe de groupes intéressants est donnée par les groupes libres F_n, à $n \geqslant 2$ lettres : ce sont les groupes engendrés par n générateurs, soumis à aucune relation.
- Une autre classe est celle donnée par les groupes fondamentaux $\pi_1(\Sigma_g)$ de surfaces fermées Σ_g de genre $g \geqslant 2$ (dans ce cas : $2g$ générateurs et une seule relation).

Deux classes de groupes

- Ensuite, on peut se donner en premier lieu un groupe et chercher à lui ajuster une géométrie X munie d'une Γ-action géométrique (ou presque).
- Une première classe de groupes intéressants est donnée par les groupes libres F_n, à $n \geqslant 2$ lettres : ce sont les groupes engendrés par n générateurs, soumis à aucune relation.
- Une autre classe est celle donnée par les groupes fondamentaux $\pi_1(\Sigma_g)$ de surfaces fermées Σ_g de genre $g \geqslant 2$ (dans ce cas : $2g$ générateurs et une seule relation).
- Dans ces deux cas, le groupe considéré, disons Π, a une présentation avec peu de relations : les automorphismes extérieurs $\Gamma = \mathrm{Out}(\Pi) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\{\mathrm{conjugaisons}\}$ fournissent *a priori* un groupe intéressant.

Des groupes vers la géométrie

Des groupes vers la géométrie

- Quelle géométrie associer à $\Gamma = \mathrm{Out}(\Pi)$?

Des groupes vers la géométrie

- Quelle géométrie associer à $\Gamma = \mathrm{Out}(\Pi)$?
- Pour $\Pi = \pi_1(\Sigma_g)$, c'est classique (mais pas élémentaire) : on fait agir $\mathrm{Out}(\Pi)$ l'espace X des métriques hyperboliques sur Σ_g (théorie de Teichmüller).

Des groupes vers la géométrie

- Quelle géométrie associer à $\Gamma = \mathrm{Out}(\Pi)$?
- Pour $\Pi = \pi_1(\Sigma_g)$, c'est classique (mais pas élémentaire) : on fait agir $\mathrm{Out}(\Pi)$ l'espace X des métriques hyperboliques sur Σ_g (théorie de Teichmüller). On peut voir de cette façon le groupe $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$ agissant sur l'espace de Teichmüller comme une généralisation des réseaux de groupes de Lie (les groupes du théorème de Borel-Harder).

Des groupes vers la géométrie

- Quelle géométrie associer à $\Gamma = \mathrm{Out}(\Pi)$?
- Pour $\Pi = \pi_1(\Sigma_g)$, c'est classique (mais pas élémentaire) : on fait agir $\mathrm{Out}(\Pi)$ l'espace X des métriques hyperboliques sur Σ_g (théorie de Teichmüller). On peut voir de cette façon le groupe $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$ agissant sur l'espace de Teichmüller comme une généralisation des réseaux de groupes de Lie (les groupes du théorème de Borel-Harder).
- Pour $\Pi = F_n$, il a fallu ajuster la construction d'une géométrie convenable : l'*outre-espace* de Culler-Vogtmann (1986) est un complexe presque simplicial, contractile et admettant une rétraction équivariante de dimension $2n-3$ dans laquelle $\mathrm{Out}(F_n)$ opère géométriquement (d'où des finitudes cohomologiques etc).

Graphes de Cayley

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ.

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ. On décrète que γ et γ' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma = \gamma' s$,

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ. On décrète que γ et γ' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma = \gamma' s$, et on pose que toutes les arêtes sont de longueur 1.

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ. On décrète que γ et γ' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma = \gamma' s$, et on pose que toutes les arêtes sont de longueur 1.
- Ce graphe $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ admet une Γ-action géométrique naturelle par translations à gauche (libre et transitive sur les sommets).

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ. On décrète que γ et γ' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma = \gamma' s$, et on pose que toutes les arêtes sont de longueur 1.
- Ce graphe $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ admet une Γ-action géométrique naturelle par translations à gauche (libre et transitive sur les sommets).
- M. Gromov a proposé dans les années 80 d'étudier les groupes de type fini à travers la géométrie de leurs graphes de Cayley.

Graphes de Cayley

- La version la plus dépouillée de cette démarche (des groupes vers la géométrie) part de n'importe quel groupe Γ engendré par une partie finie S, qu'on suppose *symétrique* : $S = S^{-1}$.
- Le *graphe de Cayley* de (Γ, S) est par définition le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ. On décrète que γ et γ' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma = \gamma' s$, et on pose que toutes les arêtes sont de longueur 1.
- Ce graphe $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ admet une Γ-action géométrique naturelle par translations à gauche (libre et transitive sur les sommets).
- M. Gromov a proposé dans les années 80 d'étudier les groupes de type fini à travers la géométrie de leurs graphes de Cayley. Le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ dépend de S, mais pas sa géométrie à l'infini : on parle d'étude des *propriétés asymptotiques* de Γ.

Alternative de Tits

Alternative de Tits

Rappelons qu'un groupe Γ est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un groupe de matrices à coefficients dans un corps.

Alternative de Tits

Rappelons qu'un groupe Γ est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un groupe de matrices à coefficients dans un corps. Pourquoi est-il bon d'être un groupe linéaire de type fini ? Par exemple parce qu'on satisfait l'*alternative de Tits* (1971) :

Alternative de Tits

Rappelons qu'un groupe Γ est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un groupe de matrices à coefficients dans un corps. Pourquoi est-il bon d'être un groupe linéaire de type fini ? Par exemple parce qu'on satisfait l'*alternative de Tits* (1971) :

Théorème

Soit Γ un groupe linéaire de type fini. Alors Γ contient ou bien un groupe libre $F_n (n \geqslant 2)$, ou bien un sous-groupe d'indice fini résoluble.

Alternative de Tits

Rappelons qu'un groupe Γ est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un groupe de matrices à coefficients dans un corps. Pourquoi est-il bon d'être un groupe linéaire de type fini ? Par exemple parce qu'on satisfait l'*alternative de Tits* (1971) :

Théorème

Soit Γ un groupe linéaire de type fini. Alors Γ contient ou bien un groupe libre $F_n (n \geqslant 2)$, ou bien un sous-groupe d'indice fini résoluble.

Ce théorème est important aussi bien pour les conséquence de son énoncé (dichotomie forte sur la croissance des groupes linéaires etc),

Alternative de Tits

Rappelons qu'un groupe Γ est dit *linéaire* s'il est isomorphe à un groupe de matrices à coefficients dans un corps. Pourquoi est-il bon d'être un groupe linéaire de type fini ? Par exemple parce qu'on satisfait l'*alternative de Tits* (1971) :

Théorème

Soit Γ un groupe linéaire de type fini. Alors Γ contient ou bien un groupe libre $F_n (n \geqslant 2)$, ou bien un sous-groupe d'indice fini résoluble.

Ce théorème est important aussi bien pour les conséquence de son énoncé (dichotomie forte sur la croissance des groupes linéaires etc), que sur les développements ultérieurs des techniques de preuve utilisées (adhérence de Zariski, théorie des représentations, corps locaux, ping-pong etc).

Linéarité vs simplicité

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ?

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$,

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$, ce qui fait beaucoup de sous-groupes distingués pour Γ !

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$, ce qui fait beaucoup de sous-groupes distingués pour Γ !
- Si on revient au problème de construction de groupes simples, il faut donc éviter les groupes de matrices.

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$, ce qui fait beaucoup de sous-groupes distingués pour Γ !
- Si on revient au problème de construction de groupes simples, il faut donc éviter les groupes de matrices.
- Exemple de groupes non linéaires : $\mathrm{Out}(F_n)$, $n \geqslant 4$ (Formanek-Procesi).

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$, ce qui fait beaucoup de sous-groupes distingués pour Γ !
- Si on revient au problème de construction de groupes simples, il faut donc éviter les groupes de matrices.
- Exemple de groupes non linéaires : $\mathrm{Out}(F_n)$, $n \geqslant 4$ (Formanek-Procesi). Mais ces groupes ne sont pas simples :

Linéarité vs simplicité

- Pourquoi est-il mauvais d'être un groupe linéaire de type fini ? Une remarque de Mal'cev dit qu'un tel groupe (infini) ne peut jamais être simple.
- En effet, un groupe Γ linéaire de type fini est *résiduellement fini*, c'est-à-dire que : $\bigcap_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta = \{1\}$, ce qui fait beaucoup de sous-groupes distingués pour Γ !
- Si on revient au problème de construction de groupes simples, il faut donc éviter les groupes de matrices.
- Exemple de groupes non linéaires : $\mathrm{Out}(F_n)$, $n \geqslant 4$ (Formanek-Procesi). Mais ces groupes ne sont pas simples : penser à la flèche naturelle $\mathrm{Out}(F_n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ obtenue en considérant l'automorphisme de $\mathbf{Z}^n = F_n/[F_n, F_n]$ induit par chaque autmorphisme de F_n.

Existence de groupes simples

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier.

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k).

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k). On a : $H_2 = H_3 = \{1\}$ (pas si facile à voir pour $k = 3$),

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k). On a : $H_2 = H_3 = \{1\}$ (pas si facile à voir pour $k = 3$), mais pour $k \geqslant 4$ le groupe H_k et chacun de ses quotients est infini.

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k). On a : $H_2 = H_3 = \{1\}$ (pas si facile à voir pour $k = 3$), mais pour $k \geqslant 4$ le groupe H_k et chacun de ses quotients est infini.
- Ces derniers groupes sont infinis, non linéaires et ont des quotients simples (car ils contiennent des sous-groupes normaux propres maximaux).

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k). On a : $H_2 = H_3 = \{1\}$ (pas si facile à voir pour $k = 3$), mais pour $k \geqslant 4$ le groupe H_k et chacun de ses quotients est infini.
- Ces derniers groupes sont infinis, non linéaires et ont des quotients simples (car ils contiennent des sous-groupes normaux propres maximaux).
- Cependant, cet argument pour l'existence de groupes simples infinis de type fini est non constructif ;

Existence de groupes simples

- On sait cependant qu'il existe des groupes simples infinis de type fini (Higman, 1951).
- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Considérons le groupe H_k défini par les générateurs $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}$ les relations $x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2$ (numérotées modulo k). On a : $H_2 = H_3 = \{1\}$ (pas si facile à voir pour $k = 3$), mais pour $k \geqslant 4$ le groupe H_k et chacun de ses quotients est infini.
- Ces derniers groupes sont infinis, non linéaires et ont des quotients simples (car ils contiennent des sous-groupes normaux propres maximaux).
- Cependant, cet argument pour l'existence de groupes simples infinis de type fini est non constructif ; et il n'assure pas que les groupes obtenus soient de présentation finie.

Classification géométrique

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini.

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini. Comment les classer ?

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini. Comment les classer ? La théorie descriptive des ensembles suggère de ne pas classer à isomorphisme près.

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini. Comment les classer ? La théorie descriptive des ensembles suggère de ne pas classer à isomorphisme près.
- M. Gromov propose de classer à quasi-isométrie près.

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini. Comment les classer ? La théorie descriptive des ensembles suggère de ne pas classer à isomorphisme près.
- M. Gromov propose de classer à quasi-isométrie près.
- Des espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont *quasi-isométriques* s'il existe une application $f : X \to Y$ «bilipschitzienne et surjective à constante additive près» :

Classification géométrique

- On peut quand même être optimiste, et se dire qu'on aura beaucoup de groupes simples, infinis de type fini. Comment les classer ? La théorie descriptive des ensembles suggère de ne pas classer à isomorphisme près.
- M. Gromov propose de classer à quasi-isométrie près.
- Des espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont *quasi-isométriques* s'il existe une application $f : X \to Y$ «bilipschitzienne et surjective à constante additive près» : il existe $C \geqslant 1$ et $D \geqslant 0$ tels que pour tous $x, x' \in X$ on ait

$$\frac{1}{C} \cdot d_X(x,x') - D \leqslant d_Y(f(x), f(x')) \leqslant C \cdot d_X(x,x') + D$$

et pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $d_Y(y, f(x)) \leqslant D$.

Exemples et classification

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques.

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques. Ceci donne un sens à la classification.

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques. Ceci donne un sens à la classification.
- Exemple 2 : un groupe qui agit géométriquement sur un espace métrique, lui est quasi-isométrique.

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques. Ceci donne un sens à la classification.
- Exemple 2 : un groupe qui agit géométriquement sur un espace métrique, lui est quasi-isométrique. Ainsi, un groupe qui agit géométriquement sur le disque de Poincaré est quasi-isométrique à cet espace symétrique de dimension 2 (à courbure strictement négative).

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques. Ceci donne un sens à la classification.
- Exemple 2 : un groupe qui agit géométriquement sur un espace métrique, lui est quasi-isométrique. Ainsi, un groupe qui agit géométriquement sur le disque de Poincaré est quasi-isométrique à cet espace symétrique de dimension 2 (à courbure strictement négative).
- Retour au problème de classification des groupes de type fini :

Exemples et classification

- Exemple 1 : les graphes de Cayley d'un même groupe sont quasi-isométriques. Ceci donne un sens à la classification.
- Exemple 2 : un groupe qui agit géométriquement sur un espace métrique, lui est quasi-isométrique. Ainsi, un groupe qui agit géométriquement sur le disque de Poincaré est quasi-isométrique à cet espace symétrique de dimension 2 (à courbure strictement négative).
- Retour au problème de classification des groupes de type fini : un moyen de classer ces groupes consiste (en première approximation) à regarder sur quelles classes d'espaces métriques un groupe donné peut agir géométriquement.

Rigidité

Rigidité

- On parle de *rigidité* pour une action géométrique $\Gamma \curvearrowright (X,d)$, par rapport à une classe $\mathcal{C}$ d'espaces métriques, si X est le seul espace dans $\mathcal{C}$ à admettre une Γ-action géométrique.

Rigidité

- On parle de *rigidité* pour une action géométrique $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, par rapport à une classe $\mathcal{C}$ d'espaces métriques, si X est le seul espace dans $\mathcal{C}$ à admettre une Γ-action géométrique.
- Exemple (G. Margulis, fin des années 70) : un réseau de groupe de Lie simple de rang $\geqslant 2$ ne peut agir de façon non dégénérée sur l'espace symétrique d'un autre groupe de Lie (théorème de *super-rigidité*).

Rigidité

- On parle de *rigidité* pour une action géométrique $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, par rapport à une classe $\mathcal{C}$ d'espaces métriques, si X est le seul espace dans $\mathcal{C}$ à admettre une Γ-action géométrique.
- Exemple (G. Margulis, fin des années 70) : un réseau de groupe de Lie simple de rang $\geqslant 2$ ne peut agir de façon non dégénérée sur l'espace symétrique d'un autre groupe de Lie (théorème de *super-rigidité*). Ainsi, si $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ $(n \geqslant 3)$ agit géométriquement sur un espace symétrique $X = G/K$, c'est que $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

Rigidité

- On parle de *rigidité* pour une action géométrique $\Gamma \curvearrowright (X, d)$, par rapport à une classe $\mathcal{C}$ d'espaces métriques, si X est le seul espace dans $\mathcal{C}$ à admettre une Γ-action géométrique.
- Exemple (G. Margulis, fin des années 70) : un réseau de groupe de Lie simple de rang $\geqslant 2$ ne peut agir de façon non dégénérée sur l'espace symétrique d'un autre groupe de Lie (théorème de *super-rigidité*). Ainsi, si $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ ($n \geqslant 3$) agit géométriquement sur un espace symétrique $X = G/K$, c'est que $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.
- Variante : contraintes sur les espaces dans lesquels un groupe fondamental de variété kählérienne compacte peut agir.

Groupes hyperboliques

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante :

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique, le δ-épaississement de deux côtés contient toujours le troisième.

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique, le δ-épaississement de deux côtés contient toujours le troisième.
- Exemple : les groupes qui agissent géométriquement sur des espaces hyperboliques (au sens classique).

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique, le δ-épaississement de deux côtés contient toujours le troisième.
- Exemple : les groupes qui agissent géométriquement sur des espaces hyperboliques (au sens classique).
- Un groupe hyperbolique a beaucoup de quotients hyperboliques (Delzant, Olshanskii), et donc n'est pas simple.

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique, le δ-épaississement de deux côtés contient toujours le troisième.
- Exemple : les groupes qui agissent géométriquement sur des espaces hyperboliques (au sens classique).
- Un groupe hyperbolique a beaucoup de quotients hyperboliques (Delzant, Olshanskii), et donc n'est pas simple. Il est coûteux de construire des groupes hyperboliques non linéaires, mais ça existe.

Groupes hyperboliques

- Finissons sur un lien entre l'approche métrique et les questions plus algébriques de simplicité et linéarité.
- Un groupe *hyperbolique* au sens de Gromov est un groupe pour lequel un (ou tout) graphe de Cayley a la propriété suivante : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique, le δ-épaississement de deux côtés contient toujours le troisième.
- Exemple : les groupes qui agissent géométriquement sur des espaces hyperboliques (au sens classique).
- Un groupe hyperbolique a beaucoup de quotients hyperboliques (Delzant, Olshanskii), et donc n'est pas simple. Il est coûteux de construire des groupes hyperboliques non linéaires, mais ça existe. Question ouverte : *exhiber un groupe hyperbolique infini non résiduellement fini*.

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).
- Exemple (G. Margulis) : soit Γ un réseau d'un groupe de Lie G simple de rang $\geqslant 2$; alors tout sous-groupe normal non central de Γ est d'indice fini.

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).
- Exemple (G. Margulis) : soit Γ un réseau d'un groupe de Lie G simple de rang $\geqslant 2$; alors tout sous-groupe normal non central de Γ est d'indice fini. Ainsi, tout sous-groupe normal $\neq \{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, pour $n \geqslant 3$, est d'indice fini.

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).
- Exemple (G. Margulis) : soit Γ un réseau d'un groupe de Lie G simple de rang $\geqslant 2$; alors tout sous-groupe normal non central de Γ est d'indice fini. Ainsi, tout sous-groupe normal $\neq \{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, pour $n \geqslant 3$, est d'indice fini.
- Le *théorème du sous-groupe normal* ci-dessus est une contrainte forte sur les sous-groupes normaux, mais plus faible que la simplicité : $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{Z})$ est juste infini, mais pas simple car linéaire (et donc résiduellement fini).

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).
- Exemple (G. Margulis) : soit Γ un réseau d'un groupe de Lie G simple de rang $\geqslant 2$; alors tout sous-groupe normal non central de Γ est d'indice fini. Ainsi, tout sous-groupe normal $\neq \{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, pour $n \geqslant 3$, est d'indice fini.
- Le *théorème du sous-groupe normal* ci-dessus est une contrainte forte sur les sous-groupes normaux, mais plus faible que la simplicité : $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{Z})$ est juste infini, mais pas simple car linéaire (et donc résiduellement fini).
- J. Wilson (1971) a prouvé la dichotomie suivante :

Groupes juste infinis

- Disons qu'un groupe est *juste infini* si tous ses quotients sont finis (tous ses sous-groupes normaux sont d'indice fini).
- Exemple (G. Margulis) : soit Γ un réseau d'un groupe de Lie G simple de rang $\geqslant 2$; alors tout sous-groupe normal non central de Γ est d'indice fini. Ainsi, tout sous-groupe normal $\neq \{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, pour $n \geqslant 3$, est d'indice fini.
- Le *théorème du sous-groupe normal* ci-dessus est une contrainte forte sur les sous-groupes normaux, mais plus faible que la simplicité : $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{Z})$ est juste infini, mais pas simple car linéaire (et donc résiduellement fini).
- J. Wilson (1971) a prouvé la dichotomie suivante : *Soit Γ un groupe de type fini et juste infini ; alors ou bien Γ est résiduellement fini, ou bien $\Gamma^\circ = \bigcap_{\Delta \lhd_{\mathrm{i.f.}} \Gamma} \Delta$ est d'indice fini et est produit direct d'un nombre fini de groupes simples.*

Une stratégie pour des groupes simples

Une idée pour obtenir des groupes simples est donc de construire des groupes juste infinis et non résiduellement finis, et qui ne se cassent pas à indice fini près en produit direct.

Une stratégie pour des groupes simples

Une idée pour obtenir des groupes simples est donc de construire des groupes juste infinis et non résiduellement finis, et qui ne se cassent pas à indice fini près en produit direct. L'idée, due à M. Burger et Sh. Mozes, est de se placer à bonne distance des réseaux de groupes de Lie :

Une stratégie pour des groupes simples

Une idée pour obtenir des groupes simples est donc de construire des groupes juste infinis et non résiduellement finis, et qui ne se cassent pas à indice fini près en produit direct. L'idée, due à M. Burger et Sh. Mozes, est de se placer à bonne distance des réseaux de groupes de Lie :

- assez près pour avoir encore l'analogue du théorème du sous-groupe normal ;

Une stratégie pour des groupes simples

Une idée pour obtenir des groupes simples est donc de construire des groupes juste infinis et non résiduellement finis, et qui ne se cassent pas à indice fini près en produit direct. L'idée, due à M. Burger et Sh. Mozes, est de se placer à bonne distance des réseaux de groupes de Lie :

- assez près pour avoir encore l'analogue du théorème du sous-groupe normal ;
- assez loin pour travailler avec des groupes non linéaires, et en fait non résiduellement finis.

Une stratégie pour des groupes simples

Une idée pour obtenir des groupes simples est donc de construire des groupes juste infinis et non résiduellement finis, et qui ne se cassent pas à indice fini près en produit direct. L'idée, due à M. Burger et Sh. Mozes, est de se placer à bonne distance des réseaux de groupes de Lie :

- assez près pour avoir encore l'analogue du théorème du sous-groupe normal ;
- assez loin pour travailler avec des groupes non linéaires, et en fait non résiduellement finis.

Théorème

Il existe une infinité de groupes simples, de présentation finie, sans torsion. De tels groupes peuvent être construits avec une action géométrique sur un produit de deux arbres homogènes.

Groupes de Burger-Mozes, 1

- Le produit d'arbres ci-dessus est l'analogue discret du produit de deux disques hyperboliques : Burger-Mozes travaillent avec des analogues de réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.

Groupes de Burger-Mozes, 1

- Le produit d'arbres ci-dessus est l'analogue discret du produit de deux disques hyperboliques : Burger-Mozes travaillent avec des analogues de réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.
- L'analogie permet de démontrer un théorème du sous-groupe normal ; la preuve, de nature mesurable, suit la même stratégie que celle de Margulis.

Groupes de Burger-Mozes, 1

- Le produit d'arbres ci-dessus est l'analogue discret du produit de deux disques hyperboliques : Burger-Mozes travaillent avec des analogues de réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.
- L'analogie permet de démontrer un théorème du sous-groupe normal ; la preuve, de nature mesurable, suit la même stratégie que celle de Margulis.
- Le groupe d'automorphismes d'un arbre homogène est très gros : on peut trouver dedans des groupes non résiduellement finis.

Groupes de Burger-Mozes, 1

- Le produit d'arbres ci-dessus est l'analogue discret du produit de deux disques hyperboliques : Burger-Mozes travaillent avec des analogues de réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.
- L'analogie permet de démontrer un théorème du sous-groupe normal ; la preuve, de nature mesurable, suit la même stratégie que celle de Margulis.
- Le groupe d'automorphismes d'un arbre homogène est très gros : on peut trouver dedans des groupes non résiduellement finis. On a besoin, au passage, du fait que les actions des groupes sur chaque arbre soit très transitives autour de chaque sommet.

Groupes de Burger-Mozes, 1

- Le produit d'arbres ci-dessus est l'analogue discret du produit de deux disques hyperboliques : Burger-Mozes travaillent avec des analogues de réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.
- L'analogie permet de démontrer un théorème du sous-groupe normal ; la preuve, de nature mesurable, suit la même stratégie que celle de Margulis.
- Le groupe d'automorphismes d'un arbre homogène est très gros : on peut trouver dedans des groupes non résiduellement finis. On a besoin, au passage, du fait que les actions des groupes sur chaque arbre soit très transitives autour de chaque sommet. Ce type de transitivité assure que les groupes ne seront pas des produits directs à indice fini près.

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion (il y a ici un petit argument de courbure négative ou nulle).

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion (il y a ici un petit argument de courbure négative ou nulle).
- Si on revient au problème de classification, on voit cependant que tous ces groupes sont dans la même classe de quasi-isométrie :

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion (il y a ici un petit argument de courbure négative ou nulle).
- Si on revient au problème de classification, on voit cependant que tous ces groupes sont dans la même classe de quasi-isométrie : ils agissent tous géométriquement sur des produits d'arbres homogènes localement finis, et tous ces arbres sont Lipschitz-équivalents entre eux (P. Papasoglu).

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion (il y a ici un petit argument de courbure négative ou nulle).
- Si on revient au problème de classification, on voit cependant que tous ces groupes sont dans la même classe de quasi-isométrie : ils agissent tous géométriquement sur des produits d'arbres homogènes localement finis, et tous ces arbres sont Lipschitz-équivalents entre eux (P. Papasoglu).
- On voudrait une infinité de classes de quasi-isométrie de groupes simples de présentation finie.

Groupes de Burger-Mozes, 2

- Au bout du compte, en voyant ces groupes comme des groupes fondamentaux de complexes carrés finis, on a fabriqué des groupes sans torsion (il y a ici un petit argument de courbure négative ou nulle).
- Si on revient au problème de classification, on voit cependant que tous ces groupes sont dans la même classe de quasi-isométrie : ils agissent tous géométriquement sur des produits d'arbres homogènes localement finis, et tous ces arbres sont Lipschitz-équivalents entre eux (P. Papasoglu).
- On voudrait une infinité de classes de quasi-isométrie de groupes simples de présentation finie. L'idée est de voir un arbre comme un immeuble de dimension 1 et de passer à la dimension supérieure.

Groupes de Kac-Moody

- La théorie des groupes de Kac-Moody (J. Tits, 1987) permet de se placer dans ce cadre de généralisation.

Groupes de Kac-Moody

- La théorie des groupes de Kac-Moody (J. Tits, 1987) permet de se placer dans ce cadre de généralisation. Avec P.-E. Caprace, nous avons prouvé le résultat suivant (2006, 2009) :

Groupes de Kac-Moody

- La théorie des groupes de Kac-Moody (J. Tits, 1987) permet de se placer dans ce cadre de généralisation. Avec P.-E. Caprace, nous avons prouvé le résultat suivant (2006, 2009) :

Théorème

Il existe une infinité de classes de quasi-isométrie de groupes simples de présentation finie. Ceci peut se voir au moyen des groupes de Kac-Moody sur les corps finis ; chacun de ces groupes agit sur un produit de deux immeubles. On peut, en outre, choisir ces groupes de sorte qu'ils possèdent la propriété (T) *de Kazhdan.*

Groupes de Kac-Moody

- La théorie des groupes de Kac-Moody (J. Tits, 1987) permet de se placer dans ce cadre de généralisation. Avec P.-E. Caprace, nous avons prouvé le résultat suivant (2006, 2009) :

Théorème

Il existe une infinité de classes de quasi-isométrie de groupes simples de présentation finie. Ceci peut se voir au moyen des groupes de Kac-Moody sur les corps finis ; chacun de ces groupes agit sur un produit de deux immeubles. On peut, en outre, choisir ces groupes de sorte qu'ils possèdent la propriété (T) *de Kazhdan.*

- La notion d'*immeuble* est elle aussi due à J. Tits : un immeuble est un complexe simplicial, recouvrement de pavages généralisés, tous isomorphes et satisfaisant de fortes conditions d'incidence.

Groupes de Kac-Moody

- La théorie des groupes de Kac-Moody (J. Tits, 1987) permet de se placer dans ce cadre de généralisation. Avec P.-E. Caprace, nous avons prouvé le résultat suivant (2006, 2009) :

Théorème

Il existe une infinité de classes de quasi-isométrie de groupes simples de présentation finie. Ceci peut se voir au moyen des groupes de Kac-Moody sur les corps finis ; chacun de ces groupes agit sur un produit de deux immeubles. On peut, en outre, choisir ces groupes de sorte qu'ils possèdent la propriété (T) *de Kazhdan.*

- La notion d'*immeuble* est elle aussi due à J. Tits : un immeuble est un complexe simplicial, recouvrement de pavages généralisés, tous isomorphes et satisfaisant de fortes conditions d'incidence.