Groupe de travail «Compactifications d'espaces symétriques»

IMMEUBLE A L'INFINI ET COMBINATOIRE DES GROUPES COMPACTIFICATION POLYÉDRIQUE DES PLATS

1. Le bord visuel $X(\infty)$ par les BN-paires

Dans cette section, $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique semi-simple défini sur un corps $\mathbf{K}$ qui est $\mathbf{R}$ ou un corps local (localement compact) totalement discontinu. On suppose que le groupe topologique $G := \mathbf{G}(\mathbf{K})$ est non compact, ce qui est équivalent du point de vue algébrique au fait que $\mathbf{G}$ admet un sous-groupe parabolique propre défini sur $\mathbf{K}$ – théorème de Bruhat-Tits-Rousseau, voir [Pr]. De manière générale, quand on arrête de souligner une lettre désignant un groupe algébrique, c'est qu'on est passé aux points sur $\mathbf{K}$; on manipule alors des groupes de Lie. Dans le cas non archimédien, on suppose le groupe simplement connexe.

Systèmes de Tits. — Soit $\mathbf{T} < \mathbf{G}$ un tore $\mathbf{K}$-déployé maximal, de centralisateur $\mathbf{M}$ et de normalisateur $\mathbf{M'}$. Le groupe (en additif) des caractères de $\mathbf{T}$ est noté Λ. L'action diagonale de $\mathbf{T}$ sur l'algèbre de Lie de G distingue un système de racines dans $V := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, de groupe de Weyl W, éventuellement non réduit et pour lequel $\mathbf{P}$ définit un choix de racines simples. On désigne par S l'ensemble des réflexions simples associées. Le résultat principal concernant la structure combinatoire du groupe G est le théorème de Borel et Tits [Bo, 21.15] qui dit que le quadruplet (G, P, M', S) est un *système de Tits* [Bbk, IV.2]. Dans notre cas, cela signifie:

(BN1) $G = \langle P \cup M' \rangle$, $(P \cap M') \triangleleft M'$ et W est naturellement isomorphe à $M'/(P \cap M')$.
(BN2) S est formé d'éléments d'ordre deux et engendre W.
(BN3) Pour $w \in W$ et $s \in S$, on a $sPw \subset PwP \cup PswP$.
(BN4) Pour tout $s \in S$, on a $sPs \not\subset P$.

Des conséquences bien connues peuvent être formellement déduites des axiomes des systèmes de Tits – du moins dans une version non raffinée. En fait, pour les groupes de Lie réels, ces conséquences sont prouvées avant la mise en évidence d'un systèmes de Tits. Soit N (resp. $\overline{N}$) le radical unipotent de P (resp. de son opposé par rapport à T).

1. Pour $w \in W$ on pose $N_w := N \cap w\overline{N}w^{-1}$. Alors, G possède une *décomposition de Bruhat* $G = \bigsqcup_{w \in W} N_w wP$, avec unicité du premier facteur [Bo, 21.16].
2. Pour toute partie I de S, la réunion de doubles classes $P\langle I \rangle P$ est un sous-groupe P_I contenant P et appelé *sous-groupe parabolique standard de type I*. D'un point de vue algébrique, les *sous-groupes paraboliques* sont définis intrinsèquement [Bo, 11.2]. On montre qu'on peut les voir à la fois comme les conjugués des P_I ou comme les sous-groupes qui contiennent un conjugué de P. Tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur.
3. Si on note $\overline{N}^w := \overline{N} \cap w\overline{N}w^{-1}$, on obtient une décomposition cellulaire $G/P = \bigsqcup \overline{N}^w \bar{w}$ avec $\bar{w} := wP$ [Bo, 21.27], qui permet de voir $\overline{N}$ comme un ouvert dense de G/P – la *grosse cellule.*

Immeuble abstrait. — Un système de Tits donne abstraitement naissance à un immeuble, voir [Br, V.3].

Définition. — *Un* immeuble abstrait *est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ recouvert par des sous-complexes – les* appartements *– qui vérifient:*

(IM0) *Chaque appartement est un complexe de Coxeter.*
(IM1) *Deux simplexes quelconques de $\mathcal{I}$ sont toujours contenus dans un appartement.*
(IM2) *Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant deux simplexes fixés A et B de $\mathcal{I}$, il existe un isomorphisme entre Σ et Σ' fixant $A \cup B$.*

Dans notre cas, le complexe de Coxeter est le découpage W-stable de V en cônes simpliciaux (qui provient du système fini de racines de G par rapport à T). Les simplexes (ou *facettes*) sont les G-translatés gP_I, ordonnés par l'inclusion renversée. Les appartements sont les translatés par G de $\mathbf{A} := \{wP_I\}_{w\in W, I\subset S}$, l'*appartement standard* associé à $\mathbf{T}$. Par conjugaison, il y a donc un appartement par tore $\mathbf{K}$-déployé maximal. La vérification des axiomes (IM) à partir des axiomes (BN) est effectuée dans [Br, V.3] par exemple. Les relations d'incidence entre sous-groupes paraboliques [Bbk, IV.6] permettent de définir un isomorphisme d'ensembles ordonnées entre l'immeuble abstrait des G-translatés de paraboliques standard et l'ensemble des sous-groupes paraboliques.

Décompositions topologiques. — On choisit K un sous-groupe compact maximal de G: c'est la donnée d'une origine o dans l'espace symétrique ou dans l'immeuble euclidien X correspondant.

– Si on est dans le cas archimédien, on choisit un plat F passant par o et P définit une chambre de Weyl c issue de o. Alors A désigne le groupe connexe qui intègre la sous-algèbre de Cartan attachée à F, et A^+ est le semi-groupe qui intègre la chambre de Weyl. La *décomposition de Cartan* s'écrit $G = \bigsqcup_{a\in\overline{A^+.o}} KaK$ et la *décomposition d'Iwasawa* fournit $G = \bigsqcup_{a\in A} KaN$.

– Si on est dans le cas non archimédien, on choisit un appartement $\mathbf{A}$ passant par o (sommet spécial) et P définit un secteur S issu de o. Alors A désigne le groupe des translations du groupe de réflexions affines de $\mathbf{A}$, et A^+ est le semi-groupe des translations qui envoient o dans S. La *décomposition de Cartan* s'écrit $G = \bigsqcup_{a\in A^+} KaK$ et la *décomposition d'Iwasawa* fournit $G = \bigsqcup_{a\in A} KaN$. Remarquons que dans ce cas, les ensembles d'indices sont discrets infinis.

D'après Iwasawa, les facettes de l'immeuble abstrait de G sont exactement les K-translatés kP_I des paraboliques standard. Le fixateur dans K de la chambre standard P est le groupe $M = K \cap P$.

Immeuble à l'infini. — On sait attacher géométriquement à G un *bord visuel* $X(\infty)$ de l'espace symétrique ou de l'immeuble euclidien X, voir [BGS, §3] et [Br, VI.9]. C'est le quotient par une relation d'équivalence «parallélisme» de l'ensemble des rayons géodésiques tracés dans l'espace métrique (géodésique, CAT(0), localement compact) en question. En outre, l'ajout convenable de $X(\infty)$ compactifie X. On partitionne $X(\infty)$ en *facettes à l'infini* et on veut voir que cela donne naissance à une réalisation géométrique de l'immeuble abstrait de G défini plus haut.

Un des ingrédients est la caractérisation géométrique des paraboliques [GJT, 3.8].

Proposition. — *Un sous-groupe fermé de G est parabolique si et seulement si c'est le fixateur d'un point du bord visuel $X(\infty)$.* $\square$

L'autre ingrédient est la détermination précise du lieu des points fixes d'un sous-groupe parabolique [GJT, 3.19]:

Lemme. — *Si $gC_I(\infty)$ est une facette à l'infini, alors son adhérence est le lieu précis des points fixes sous le sous-groupe parabolique gP_Ig^{-1}.* □

Sachant qu'une facette à l'infini et son adhérence se déterminent mutuellement, la prise de points fixes et la prise de stabilisateur (ou de fixateur) établissent des isomorphismes d'ensembles ordonnés qui permettent de voir le bord visuel $X(\infty)$ comme une réalisation de l'immeuble sphérique de G. Noter que cette réalisation vit dans une sphère ambiante $X(\infty)$. Ce n'est pas *a priori* le cas pour la représentation sphérique d'un immeuble à groupe de Weyl fini quelconque, qui est obtenue par recollement de sphères. Le cas des immeubles est traité en détail dans [Br, VI.9.E].

2. Compactifications métriques

Domination entre compactifications. — On se donne X un espace métrisable localement compact.

Définition. — (i) *Une suite de points est* fuyante *si elle sort de tout compact.*
(ii) *Une* compactification *de X est la donnée d'un couple $(\overline{X}, i)$ où $\overline{X}$ est un espace métrisable compact et $i : X \hookrightarrow \overline{X}$ est un plongement d'image dense. On parle de H-*compactification *quand le plongement i est équivariant pour les actions d'un même groupe H sur X et $\overline{X}$.*
(iii) *Une compactification $(\overline{X}, i)$ en* domine *une autre $(\overline{X}', i')$ si i' se factorise à travers i. On parle d'*isomorphisme *quand on a domination réciproque.*

Remarques. — 1. On pose $\partial X := \overline{X} \setminus X$. On veut voir ∂X comme l'ensemble F des valeurs d'adhérence de suites fuyantes de $i(X) = X$. Déjà un point de X admet par hypothèse un voisinage compact, et ne peut donc être limite d'une suite fuyante. Soit maintenant $\xi \in \partial X$. Par densité, il s'écrit $\xi = \lim x_n$ pour une suite de points de X. Pour une métrique induisant la topologie de $\overline{X}$, tout compact K de X est à distance strictement positive de ξ et les x_n finissent par sortir de K.
2. Avec cette description, on voit alors que l'image de X par le plongement de toute compactification est ouverte. Considérons ξ un point dans l'adhérence de ∂X et gardons une métrique qui induit la topologie de $\overline{X}$. Il suffit de voir que ξ est en fait dans ∂X, et pour cela on suppose le contraire. Par locale compacité, une petite boule compacte $B(\xi, \epsilon)$ tracée dans X est un voisinage de ξ dans X. Par hypothèse, il existe un point $\xi' \in \partial X$ qui approche ξ à $\epsilon/2$ près. Il ne peut alors exister de suite fuyante de points de X finissant par approcher ξ' à $\epsilon/2$ près: contradiction avec la description de ∂X.

Critère de domination. — Le lemme [GJT, 3.28] qui suit est à la base de nombreuses identifications entre compactifications. Il s'appliquera aussi bien aux plats qu'aux espaces symétriques.

Lemme. — *On suppose qu'on a deux compactifications $(\overline{X}, i)$ et $(\overline{X}', i')$ de X, et qu'il existe une classe $\mathcal{S}$ de suites dans X vérifiant les trois points suivants.*

a) *Toute suite de $\mathcal{S}$ est fuyante.*
b) *L'image par i de toute suite de $\mathcal{S}$ est convergente dans $\overline{X}$.*
c) *De toute suite fuyante de X, peut être extraite une suite dans $\mathcal{S}$.*

Pour ce qui est de la seconde compactification $(\overline{X}', i')$, on fait les hypothèses suivantes.

(1) *L'image par i' de toute suite de $\mathcal{S}$ est convergente dans $\overline{X}'$.*
(2) *Si les images par i de deux suites de $\mathcal{S}$ ont même limite dans $\overline{X}$, leurs images par i' ont même limite dans $\overline{X}'$.*

Sous toutes ces conditions, la compactification $(\overline{X}, i)$ domine $(\overline{X}', i')$.

Preuve. — On munit X (resp. X') d'une métrique compatible à sa topologie. On veut définir une application de domination $\varphi : X \to X'$. La définition s'impose naturellement sur $i(X)$: $\varphi\big(i(x)\big) := i'(x)$, et donne un homémorphisme. Le point c) permet de voir tout point $\xi \in \partial X$ (resp. $\xi' \in \partial X'$) comme limite de l'image par i (resp. i') d'une suite s de $\mathcal{S}$. Le point (2) justifie alors la définition $\varphi\big(\lim i(s_n)\big) := \lim i'(s_n)$. On obtient une application $\partial X \to \partial X'$, et donc on prolongement surjectif de φ à $\overline{X}$. Il reste à voir la continuité de φ en $\xi \in \partial X$. On pose $\xi = \lim x_n$, avec $(x_n) \in \mathcal{S}$; $\varphi(\xi)$ est par définition $\lim i'(x_n)$.
— Donnons-nous (y_n) une suite de points de X telle que $i(y_n)$ tend vers ξ. Supposons que $i'(y_n)$ ne converge pas vers $\varphi(\xi)$: c'est qu'il existe une sous-suite y_{n_k} et un $\epsilon > 0$ avec $d'(\varphi(\xi), i'(y_{n_k}) \geq \epsilon$ pour tout k. On peut extraire de y_{n_k} une suite fondamentale dont l'image par i doit tendre vers ξ comme pour x_n. Problème avec le point (2), car $i'(x_n)$ et $i'(y_n)$ ne peuvent pas avoir la même limite.
— Donnons-nous maintenant une suite de points $\xi_n \in \partial X$ qui tend vers ξ. D'après le point qui précède, on peut trouver pour chaque n un point y_n de X tel que $d\big(i(y_n), \xi_n\big) < 2^{-n}$ et $d'\big(i'(y_n), \varphi(\xi_n)\big) < 2^{-n}$. Pour la même raison et puisque $i(y_n)$ tend vers ξ, la suite $i'(y_n)$ tend vers $\varphi(\xi)$. Finalement, $\varphi(\xi_n)$ tend vers $\varphi(\xi)$. $\square$

3. Compactification polyédrique d'un plat

Exigences et description ensembliste. — On part de la décomposition en cônes simpliciaux de V obtenue à partir du système de racines de G. La construction du bord ajouté à V obéit au souci de décrire finement les façons de sortir de tout compact en restant à distance bornée de certains murs. À l'opposé, si deux suites fuyantes de V s'éloignent de tout hyperplan singulier et restent dans une chambre donnée, elles auront même limite dans le bord. On désigne par Σ l'ensemble des facettes de V et par $\langle F \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré dans V par $F \in \Sigma$. On travaillera indifféremment avec les sous-espaces vectoriels quotients $V/\langle F \rangle$ et les orthogonaux $F^{\perp}$.

Définition. — *La* compactification polyédrique *de V est la somme disjointe*

$$\overline{V} := \bigsqcup_{F \subset \Sigma} V/\langle F \rangle = \bigsqcup_{F \subset \Sigma} F^{\perp}.$$

Les deux références [GJT] et [L] présentent – sous des points de vue un peu différents – la même construction topologique de la compactification polyédrique, apparue à l'origine dans [AMRT]. Dans [GJT, 3.23], la topologie est définie par récurrence dans une situation un peu plus générale qu'une décomposition d'espace euclidien induite par un système de racines. Les deux paragraphes qui suivent privilégient l'approche plus directe de [L, §2]. On reviendra à [GJT] pour définir les suites fondamentales, ce qui permettra de prouver l'unicité de cette compactification.

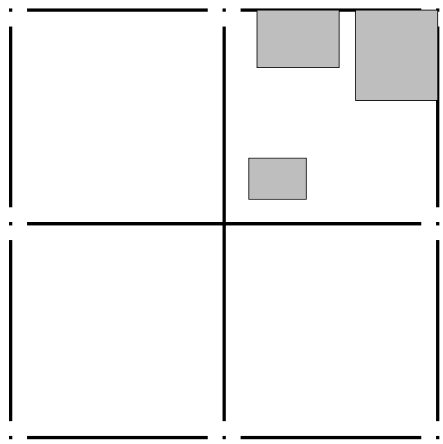
Topologie des coins. — Fixons une chambre c. Son *coin associé* est la somme disjointe

$$V^c := \bigsqcup_{F \subset \bar{c}} V/\langle F \rangle = \bigsqcup_{F \subset \bar{c}} F^{\perp}.$$

Chaque coin de chambre contient en particulier l'exemplaire de V. Numérotons les murs de c, c'est-à-dire les racines simples a_i correspondantes. Étant donnée une facette F dans l'adhérence de c, on associe à tout $x + \langle F \rangle \in V/\langle F \rangle$ le n-uplet où la coordonnée numéro i est $a_i(x)$ si F est dans le mur numéro i, $+\infty$ sinon. Ceci définit une application bijective $f_c : V^c \to]-\infty; +\infty]^n$, grâce à laquelle on peut faire un transport de topologie.

Il est possible de décrire une base de cette topologie. Si F est une facette dans l'adhérence de c et si U est une partie de V, on pose $c_U^F := \bigcup_{F' \subset \overline{F}} (U + \overline{F}) + \langle F' \rangle$. Alors la famille des c_U^F pour U un ouvert de V et F une facette dans l'adhérence de c est la base cherchée [L, 2.4]. On retrouve un ouvert U de V sous forme de $c_U^{\{0\}}$.

Dessins. — Des ouverts de coins pour le type $A_1 \times A_1$.



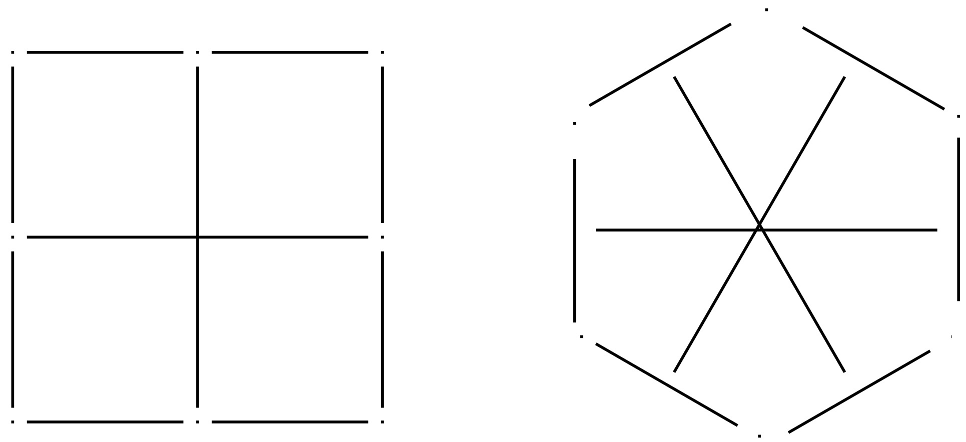
Topologie globale. — Pour ce qui est de la topologie sur $\overline{V}$, on décrète qu'une de ses parties est ouverte si et seulement si sa trace sur tous les coins de chambres est ouverte. On peut alors prouver les faits suivants [L, 2.6]:

– la topologie initiale de V^c et celle induite par $\overline{V}$ coïncident;
– V^c est un ouvert de $\overline{V}$;
– les adhérences de c dans le coin V^c et dans la compactification $\overline{V}$ coïncident.

En outre, le fermé en question est compact et c'est un domaine fondamental pour l'action du groupe de Weyl sur $\overline{V}$ [L, 2.7]. Le résultat qui suit est la proposition 2.8 de [L], il relie la combinatoire du groupe de Weyl à la topologie de la compactification polyédrique de V.

Proposition. — (i) *L'espace topologique $\overline{V}$ est à base dénombrable de voisinages, séparé, compact, contractile et admet V comme sous-espace dense.*
(ii) *Si F est une facette, la topologie sur $V/\langle F \rangle$ induite par la compactification est celle d'espace vectoriel quotient. En outre, l'adhérence de $V/\langle F \rangle$ dans $\overline{V}$ se décrit combinatoirement comme $\bigsqcup_{\overline{F'} \supset F} V/\langle F' \rangle$.* □

Dessins. — Compactifications pour les types $A_1 \times A_1$ et A_2.



Les suites fondamentales. — Décrivons la classe distinguée de suites de V permettant de prouver l'unicité de la compactification polyédrique (grâce au critère de domination appliqué dans les deux sens). Travaillons avec les orthogonaux pour le produit scalaire du système de racines. Tout point y de V s'écrit alors $y_F + y^F$, avec $y_F \in \langle F \rangle$ et $y^F \in F^\perp$. Les éléments de la compactification polyédrique sont de la forme (F, y^F), pour F une facette de V et $y^F \in F^\perp$.

Définition. — *Une suite de points y_n de V est F-*fondamentale *si elle* converge formellement *vers un élément (F, y^F). Ceci signifie que y_n^F converge vers y^F et que $y_{n,F}$ est dans tout translaté du cône F à partir d'un certain rang. Le point (F, y^F) de la compactification est alors appelé la* limite formelle *de la suite F-fondamentale $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Une suite est* fondamentale *si elle est F-fondamentale pour une facette F.*

Voici le lemme de base pour les suites fondamentales de V.

Lemme. — *La classe des suites fondamentales de V jouit des propriétés suivantes.*

(i) *Une suite fondamentale est une suite fuyante.*
(ii) *Toute suite fuyante de V admet une sous-suite fondamentale.*
(iii) *Une sous-suite de suite fondamentale est fondamentale.*

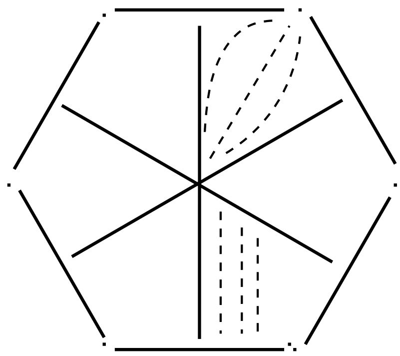
Preuve. — Les premier et dernier points sont clairs. Pour le second, on se donne une suite de points de V qui sort de tout compact. Alors, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de chambres, on peut en extraire une sous-suite qui reste dans l'adhérence d'une chambre fixée c, ce qui détermine des murs de racines simples. Parmi eux, on fait le tri entre ceux pour lesquels la projection orthogonale des éléments reste bornée et les autres. Quitte à extraire, on peut supposer que les projections qui restent bornées convergent dans l'orthogonal d'une facette F. On obtient alors une sous-suite F-fondamentale. □

Existence et unicité. — Le résultat principal concernant la compactification polyédrique des plats est le suivant [GJT, 3.29].

Théorème. — *Il existe une unique compactification métrisable $\overline{V}$ de V telle que:*

(i) *toute suite fondamentale de V est convergente dans $\overline{V}$;*
(ii) *deux telles suites ont même limite si et seulement elles ont même limite formelle.* □

Dessin. — Convergence de suites dans la compactification polyédrique.



Références

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y.S. Tai: *Smooth compactifications of locally symmetric spaces.* Math. Sci. Press, Brookline Mass. (1975).

[Bbk] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie* IV-VI. Masson (1981).

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder: *Manifolds of nonpositive curvature.* Progress in Math. **61**, Birkhäuser (1985).

[Bo] A. Borel: *Linear algebraic groups.* Springer GTM **126** (1990).

[Br] K. Brown: *Buildings.* Springer (1989).

[GJT] Y. Guivarc'h, L. Ji, J.C. Taylor: *Compactifications of symmetric spaces.* Progress in Math. **156**, Birkhäuser (1998).

[L] E. Landvogt: *A compactification of the Bruhat-Tits building.* Lecture Notes in Mathematics **1619**. Springer (1996).

[Pr] G. Prasad: *Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and a theorem of Tits.* Bull. SMF **110** (1982), 197-202.

Bertrand RÉMY 8 novembre 1999.