Groupe de travail «Compactifications d'espaces symétriques»

BORDS ET COMPACTIFICATIONS DE FURSTENBERG

Z ! Ces notes se basent essentiellement sur la référence [GJT]. Par souci de cohérence, certaines notations ont pourtant été légèrement modifiées.

Pour un certain nombre de compactifications d'espaces symétriques, la construction consiste à mettre en évidence des plongements dans un espace compact métrisable qu'on comprend bien, et à passer à l'adhérence. Par exemple, on travaille sur un espace projectif attaché à une représentation pour la compactification de Satake, et sur l'espace des sous-groupes fermés pour la compactification intrinsèque. Dans le cas des compactifications de Furstenberg, les espaces compacts métrisables en question sont formés des mesures de probabilité sur un espace métrique compact convenable. Le tout est de définir et manipuler ces espaces métriques compacts, qu'on appelle les *bords de Furstenberg* du groupe. Il se trouve qu'on sait faire une belle théorie intrinsèque des bords d'un groupe; on sait même l'appliquer aux groupes de Lie semi-simples. Grâce à cela, on obtient des plongements et des compactifications assez explicites, qu'il s'agit d'identifier ensuite à celles qu'on connaît déjà.

Voici ce qu'on veut faire ici. Le §1 esquisse la théorie des bords de groupes topologiques due à H. Furstenberg himself. Le cadre est très général, et on va surtout faire appel à des notions dynamiques liées à une action de groupe topologique – *proximalité* et *forte proximalité*. Le §2 va fournir un procédé de simplification dans la détermination des bords, qui utilise la notion de *moyennabilité*. Il est parfaitement adapté au cas des groupes semi-simples, cadre dans lequel on se place dès lors. On prouve ensuite un critère pour savoir quand l'espace symétrique se plonge dans les mesures de probabilité d'un bord donné. Le §3 étudie la compactification associée au bord de Furstenberg maximal, c'est-à-dire la variété des drapeaux complets du groupe. Le but est d'identifier la compactification de Satake maximale à l'adhérence de l'orbite de la seule probabilité du bord maximal qui soit invariante sous le sous-groupe compact maximal.

1. Théorie des bords. Proximalités

Dans cette section, G est un groupe topologique localement compact à base dénombrable, *i.e.*, métrisable et dénombrable à l'infini. On se donne un espace métrique compact (E, d) muni d'une action topologique de G. On désigne par $C(E)$ l'espace des fonctions continues sur E. La topologie considérée sur son dual est la topologie faible-$*$. L'espace $\mathcal{M}_1(E)$ des probabilités sur E est une partie compacte convexe métrisable du dual faible de $C(E)$ – pour la métrisabilité, voir [B, III §1, exercice 14.a]. On désigne enfin par δ_E l'ensemble des mesures de Dirac sur E.

1.A *Proximalité et forte proximalité.* — Ces notions sont de nature dynamique. L'une s'énonce au niveau des mesures, l'autre au niveau de l'espace métrique E lui-même – voir [F, §4] et [Ma, p.196].

Définition. — (i) *Une partie F de E est dite G-*contractable *s'il existe une suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de G telle que le diamètre de g_nF tende vers 0.*

(ii) *L'espace E est dit G-*fortement proximal *si pour toute probabilité μ sur E, il existe une suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de G telle $g_{n*}\mu$ tende vers une mesure de Dirac.*
(iii) *L'espace E est dit G-*proximal *si toute paire de point est G-contractable.*
(iv) *L'espace E est dit G-*minimal *si toute partie fermée G-invariante est triviale.*

Remarques. — 1. Pour la G-contractabilité, requérir la condition $\mathrm{diam}(g_nF) \to 0$ équivaut à requérir la convergence de g_nF vers un point.
2. La G-minimalité requiert la densité de toute G-orbite. Un bon moyen d'être G-minimal est d'être homogène sous G.
3. La G-forte proximalité requiert que l'adhérence de la G-orbite de toute probabilité contienne une mesure de Dirac. Autrement dit: $\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E) \quad \overline{G_*\mu} \cap \delta_E \neq \varnothing$.
4. Raisonner sur une probabilité isobarycentre de mesures de Dirac montre que dans un espace fortement proximal, toute partie finie est G-contractable. Ceci implique en particulier la proximalité de l'espace.

1.B *Axiomatique des bords.* — Voici la définition (très concise) des bords de groupes.

Définition. — *L'espace métrique compact (E,d), muni d'une action topologique de G, est un* bord *de ce groupe s'il est G-minimal et G-fortement proximal.*

Exemples. — 1. L'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ est un bord du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. On peut le montrer à la main en utilisant des dilatations fixant un espace de codimension 2 [F, p.197], mais cela découlera de la proposition plus générale 2.C. L'espace $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ est aussi un bord de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$.
2. À titre d'exemple un peu exotique, Furstenberg considère un groupe libre non commutatif Γ à $r > 1$ générateurs [F, p.197]. Alors, l'ensemble des mots réduits en les générateurs et leurs inverses est un bord de Γ. Géométriquement, les mots de Γ peuvent être vus comme les sommets d'un arbre régulier de valence $2r$. Dans ce cas, les mots infinis en question sont les rayons issus d'une origine – le mot vide. Ce bord de Furstenberg est le bord géométrique défini en termes de classes de rayons géodésiques [GH, §6]. Par cardinalité, l'action de Γ n'est pas transitive, contrairement à celle du groupe d'isométries complet.

1.C *Reconnaissance d'un bord.* — On veut un critère pour mettre en évidence des bords. Il est dû à Margulis et sera utilisé pour les groupes semi-simples. Commençons par un lemme.

Lemme. — *Si E est G-proximal, si F est une partie G-contractable et si x est un point de E, alors $F \cup \{x\}$ est une partie G-contractable.*

Preuve [Ma, VI.1.3]. Par G-contractabilité de F, on peut se donner une suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ telle que le diamètre de g_nF tende vers 0. Quitte à extraire, on peut supposer que g_nF (resp. g_nx) tend vers $\{y\}$ (resp. z) pour y et z dans E. Par G-proximalité de E et quitte à extraire, il existe une suite $\{h_n\}_{n\geq 0}$ telle que h_ny et h_nz tendent vers un même point de E. Par continuité de la G-action sur E, pour chaque $n \geq 0$, il existe un voisinage Y_n (resp. Z_n) de y (resp. z) tel que le diamètre de $h_nY_n \cup h_nZ_n$ tende vers 0. Quitte à extraire une sous-suite de $\{g_n\}_{n\geq 0}$, on peut supposer que $g_nF \subset Y_n$ et $g_nx \in Z_n$. Finalement, $\{h_ng_n\}_{n\geq 0}$ contracte $F \cup \{x\}$ sur un point. $\square$

La simplification apportée par le critère consiste essentiellement à déduire la forte proximalité de la proximalité sous des hypothèses supplémentaires. Donc à limiter les vérifications au niveau du seul espace métrique.

Proposition. — (i) *Si E est G-proximal et si chacun de ses points admet un voisinage G-contractable, alors E est G-fortement proximal.*
(ii) *Si E est G-minimal, G-proximal et s'il contient un ouvert non vide G-contractable, alors c'est un bord de G.*

Preuve [Ma, VI.1.6]. Le point (ii) se déduit facilement du point (i), en appliquant la G-minimalité au complémentaire de la réunion des translatés de l'ouvert non vide G-contractable.

Point (i). À toute probabilité μ sur E, on attache les deux nombres

$$\alpha(\mu) := \sup_{x\in E} \mu(\{x\}) \quad \text{et} \quad \beta(\mu) := \sup_{\nu\in\overline{G_*\mu}} \alpha(\nu).$$

1) Commençons par deux remarques. Puisque seul un nombre fini de points peut fournir un singleton de masse $\geq \varepsilon > 0$, il existe x tel que $\alpha(\mu) = \mu(\{x\})$. Soient $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de parties mesurables qui se contractent sur $\{x\}$ et $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ une suite de probabilités qui tendent vers μ, alors $\limsup \mu_n(A_n) \leq \mu(\{x\})$.

2) Pour toute probabilité μ sur E, la quantité $\beta(\mu)$ est atteinte par une probabilité de $\nu\in\overline{G_*\mu}$. Supposons que tel ne soit pas le cas. On se donne alors une suite de probabilités $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ telle que $\alpha(\mu_n)$ tende vers $\beta(\mu)$. Par la première remarque de 1), on peut écrire $\alpha(\mu_n) = \mu(\{x_n\})$ pour x_n dans E. Quitte à extraire, on peut supposer que $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ converge vers une mesure ν de $\overline{G_*\mu}$ et que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge vers un point x de E. La seconde remarque de 1) permet d'aboutir à la contradiction

$$\beta(\mu) = \lim \mu_n(\{x_n\}) \leq \nu(\{x\}) \leq \alpha(\nu) < \beta(\mu).$$

3) Montrons ensuite l'implication

$$\mu\in\mathcal{M}_1(E) \setminus \delta_E \Longrightarrow \beta(\mu) > \alpha(\mu).$$

Pour cela, on se donne μ dans $\mathcal{M}_1(E) \setminus \delta_E$. Il existe x dans E tel que $\alpha(\mu) = \mu(\{x\})$. Par compacité, on recouvre E par un nombre fini d'ouverts G-contractables. Puisque μ n'est pas une mesure de Dirac, il en existe alors nécessairement un – noté U – tel que $\mu(U\cup\{x\}) > \alpha(\mu)$. Par le lemme, $U \cup \{x\}$ est G-contractable, d'où (quitte à extraire) une suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ qui le contracte sur un point y, et (quitte à extraire encore) telle que $g_{n*}\mu$ tende vers une probabilité $\nu\in\overline{G_*\mu}$. Par la seconde remarque de 1), on obtient alors

$$\alpha(\nu) \geq \nu(\{y\}) \geq \lim(g_{n*}\mu)\big(g_n(U \cup \{x\})\big) = \mu(U \cup \{x\}) > \alpha(\mu),$$

qui fait aboutir à $\beta(\mu) > \alpha(\mu)$.

4) Soit maintenant une probabilité μ quelconque sur E. Par 2), on peut se donner ν qui réalise $\beta(\mu)$. On veut voir qu'il y a une mesure de Dirac dans $\overline{G_*\mu}$, et pour cela on suppose le contraire. Autrement dit, ν n'est pas une mesure de Dirac. Mézalor par 3), on a

$$\beta(\nu) > \alpha(\nu) = \beta(\mu),$$

qui est incompatible avec l'inclusion $\overline{G_*\nu} \subset \overline{G_*\mu}$. □

2. Les bords d'un groupe semi-simple. Plongements d'espaces symétriques

On va dresser la liste des bords d'un groupe de Lie semi-simple. Elle n'est rien d'autre que celle des quotients du groupe par ses sous-groupes paraboliques. On obtient ensuite un critère qui dit quand il est possible de plonger l'espace symétrique dans les probabilités du bord. Dans le cas d'un groupe simple, il suffit que le parabolique soit un sous-groupe propre. Une fois l'injection ensembliste obtenue, il n'y a plus de condition supplémentaire pour que les choses se passent bien du point de vue topologique.

2.A *Usage de la moyennabilité.* — Pour une sous-section encore, G désigne un groupe topologique soumis aux conditions assez générales de la section précédente. Rappelons rapidement la définition suivante [Ma, I.5.5].

Définition. — *Un groupe topologique G est* moyennable *s'il satisfait l'une des trois conditions équivalentes suivantes.*

(i) *L'espace des fonctions continues bornées sur G admet une moyenne invariante à gauche sous G.*
(ii) *Toute G-action continue affine sur un sous-espace convexe compact d'espace vectoriel topologique localement convexe admet un point G-fixe.*
(iii) *Pour tout espace compact E muni d'une G-action topologique, il existe une probabilité de $\mathcal{M}_1(E)$ fixe sous G.*

Référence. L'équivalence de (i) et (ii) est due à Rickert; (ii) implique (iii) immédiatement, et la réciproque se prouve en passant au barycentre pour une probabilité G-invariante sur le compact convexe. $\square$

Qu'il existe une large classe de groupes moyennables en théorie des groupes de Lie par exemple, provient des faits suivants. Un groupe abélien (resp. compact) est moyennable. La moyennabilité se transmet aux sous-groupes fermés et une extension de groupes moyennables est moyennable. Par conséquent, les groupes résolubles sont moyennables. En combinant ces faits, on prouve qu'un sous-groupe parabolique minimal de groupe de Lie est moyennable. Une référence (avec notes historiques) pour les groupes moyennables est [P].

Voici un critère qui, sous des conditions favorables, permet de dominer tout bord par un espace homogène. Sa démonstration enchaîne tous les éléments de la définition d'un bord.

Proposition. — *Si G admet un sous-groupe fermé moyennable et cocompact P, alors tout bord de G est une image équivariante de G/P.*

Preuve [F, 4.4]. Choisissons une partie compacte K de G telle que $G = KP$. On travaille d'abord avec la restriction à P de la G-action sur $\mathcal{M}_1(E)$. Par moyennabilité, P fixe une mesure μ. Par conséquent, la G-orbite de μ est aussi sa K-orbite, et est donc fermée. Par G-forte proximalité, cette G-orbite contient une mesure de Dirac et est donc constituée de telles mesures. Ainsi, $\mu = \delta_x$ pour un point P-fixe $x \in E$. Par le même raisonnement que ci-dessus pour la mesure μ, l'orbite $G.x$ est fermée. On en déduit par G-minimalité que $Gx = E$. $\square$

Remarques. — 1. Le cas d'un groupe de Lie semi-simple G est couvert par ce résultat, en vertu des décompositions d'Iwasawa pour G et de Langlands pour un sous-groupe parabolique minimal bien choisi par rapport à un sous-groupe compact maximal.
2. La description précédente d'un bord non trivial de groupe libre (non commutatif) montre en particulier que ces groupes ne sont pas moyennables, ce qui peut se voir à la main. En effet,

la proposition implique en particulier que tout bord de groupe moyennable doit être réduit à un point.

2.B *Géométrie et mesures sur les variétés de drapeaux.* — Désormais, G désigne un groupe de Lie semi-simple à centre fini, pour lequel on choisit une involution de Cartan, ce qui fournit la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. On désigne par K le sous-groupe compact maximal qui intègre $\mathfrak{k}$, par A le groupe qui intègre un choix de sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. On choisit P un sous-groupe parabolique minimal contenant A. Il définit une chambre de Weyl positive $\overline{\mathfrak{a}_+}$ et un sous-groupe $\overline{N}$, l'opposé par rapport à A de son radical unipotent $N < P$. On désigne par Σ l'ensemble des racines restreintes de G relativement à A, dont un système positif Σ^+ est déterminé par le choix de P. Pour tout ensemble de racines simples I, on désigne par Σ^I l'ensemble des racines combinaisons linéaires des racines de I. On pose enfin $\Sigma_I := \Sigma \setminus \Sigma^I$ et $\rho_I := \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Sigma^+\setminus\Sigma^I}\beta$.

On désigne par X l'espace symétrique G/K, et par $\mathcal{F}$ la variété compacte des drapeaux complets $G/P \simeq K/M$. Les choix précédents fournissent une origine $o := K$ dans X, et $\omega := P$ dans $\mathcal{F}$. La décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ permet d'introduire l'application $H : G \to \mathfrak{a}$; $g \mapsto H(g)$, définie par: $g \in Ke^{H(g)}N$. Pour chaque sous-groupe parabolique standard P^I, on désigne par G^I le sous-groupe semi-simple de système de racines Σ^I qui est contenu dans le facteur de Lévi de P^I associé à A. Son sous-groupe compact maximal est $K^I = G^I \cap K$.

Le quotient $\mathcal{F}_I := G/P^I = K/K^IM$ est compact, homogène sous K, et admet une unique probabilité K-invariante notée m_I. La probabilité K-invariante sur $\mathcal{F}$ sera notée simplement m. L'image $\overline{N}.\omega$ du sous-groupe $\overline{N}$ par la projection $p : G \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ est un ouvert dense conégligeable de $\mathcal{F}$. De la même façon, on obtient un ouvert dense conégligeable de G/P^I à partir du radical unipotent $\overline{N_I}$ de l'opposé de P^I relativement à A. Plus précisément, on a les formules d'intégration:

$$\int_{\mathcal{F}_I}\varphi dm_I = \int_{K/K^IM}\varphi(kK^IM)d(kK^IM) = \frac{1}{c_I}\int_{\overline{N_I}}\varphi(\overline{n}P^I)e^{-2\langle\rho_I,H(\overline{n})\rangle}d\overline{n},$$

où $c_I := \displaystyle\int_{\overline{N_I}} e^{-2\langle\rho_I,H(\overline{n})\rangle}d\overline{n} > 0$.

La restriction à A de l'action de G sur $\mathcal{F}_I$ est décrite par $a.gP^I = aga^{-1}P^I$. On va souvent faire opérer des éléments diagonalisables bien choisis dans A sur des sous-groupes de radicaux unipotents. Ce genre d'action se lit sur la représentation adjointe. En particulier, *si on choisit pour a l'exponentielle e^H d'un élément H dans la chambre de Weyl positive, l'élément a sera contractant sur l'image ouverte, dense, conégligeable de $\overline{N_I}$ dans $\mathcal{F}_I$.* Ses itérés font tendre tout point de cet ouvert sur l'origine $\omega_I := P^I$ de $\mathcal{F}_I$; ses valeurs propres sont de la forme $\exp\big(-\beta(H)\big)$, pour $\beta\in\Sigma^+ \setminus \Sigma^I$.

Définition. — (i) *On appelle l'ouvert dense conégligeable $\overline{N}.\omega$ (resp. $\overline{N_I}.\omega_I$) la* grosse cellule *de la variété de drapeaux $\mathcal{F} = G/P$ (resp. $\mathcal{F}_I = G/P^I$).*
(ii) *Le* bord de Furstenberg maximal *de G est le quotient $\mathcal{F} = G/P$.*

Remarques. — 1. L'idée d'utiliser des automorphismes contractants sur une partie ouverte conégligeable d'une variété des drapeaux va être très utilisée par la suite. Elle établit un lien avec la notion abstraite de contraction utilisée dans le cadre général de la théorie des bords.

2. La terminologie de «bord» pour $\mathcal{F}$ est justifiée dans la sous-section qui suit.

2.C *Groupes de Lie semi-simples et sous-groupes paraboliques.* — On va utiliser les deux propositions précédentes pour déterminer topologiquement les bords d'un groupe semi-simple. Ce résultat est dû à Furstenberg et montre que pour la classe de groupes qu'on considère, les bords sont homogènes et pas seulement minimaux.

Théorème. — *Soit G un groupe de Lie semi-simple à centre fini. Alors $\mathcal{F}$ est un bord de G, et un espace métrique compact (E,d) est un bord de G si et seulement s'il existe un sous-groupe parabolique Q tel que $E \simeq G/Q$.*

Preuve [GJT 9.37]. La dernière proposition montre que les bords de G doivent être des images équivariantes de G/P. La structure de l'ensemble des sous-groupes paraboliques montre que donc que la liste des bords est à dresser à partir de celle des variétés de drapeaux.

Qu'un quotient G/Q soit bien un bord provient de l'utilisation du critère de reconnaissance 1.C et de l'homogénéité de G/Q. Cela réduit la vérification à la mise en évidence:

- d'un ouvert G-contractable dans G/Q,
- de la G-proximalité de G/Q.

D'après les remarques sur la géométrie des variétés de drapeaux, la première condition est remplie grâce à un ouvert relativement compact de la grosse cellule. Rappelons que cet ouvert $\overline{N_Q}.\omega_Q$ dense, conégligeable et A-stable est l'orbite de l'origine $\omega_Q = Q$ sous l'action du radical unipotent $\overline{N_Q}$ du parabolique opposé à Q relativement à A. Pour la seconde condition, on se donne deux points qu'il s'agit de contracter par une suite d'éléments de G. Déjà, on ramène l'un des deux à l'origine ω_Q par homogénéité. Notons y le second. Il existe un petit ouvert V autour de l'identité dans le groupe G, tel que que $V.\omega_Q$ reste dans $\overline{N_Q}.\omega_Q$. Par densité, Vy rencontre $\overline{N_Q}.\omega_Q$. Ainsi, en perturbant la paire de points par un élément de V, on obtient une paire de points tous deux dans la grosse cellule. On finit par contracter cette paire en itérant l'exponentielle d'un élément à l'intérieur de la chambre de Weyl positive. □

Exemple. — On retrouve bien l'exemple 1.B.1 de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$.

La proposition réduit l'étude des bords à celle des quotients de G par ses sous-groupes paraboliques standard, en nombre fini.

2.D *Bords fidèles.* — Conservons le sous-groupe parabolique P^I et définissons l'application:

$$\begin{array}{cccc} \phi_I : & X & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(\mathcal{F}_I) \\ & gK & \mapsto & g_* m_I \end{array}.$$

On veut savoir quand ϕ_I est un plongement autorisant une compactification. On va avoir besoin du petit lemme suivant [GJT, 9.7].

Lemme. — *Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ une suite convergente de sous-groupes fermés d'un groupe G localement compact métrisable, tendant vers F. Soit $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ une suite convergente de probabilités sur un G-espace E localement compact métrisable, tendant vers μ. Pour chaque indice n, on suppose que μ_n est stable sous F_n. Alors, μ est stable sous F.*

Preuve [GJT, 9.7]. On se donne g un élément de F, qu'on peut écrire $g = \lim g_n$ avec g_n dans F_n. On se donne aussi φ une fonction continue à support compact sur E. Puisque $\varphi(g_n.x)$ converge uniformément vers $\varphi(g.x)$, on a la convergence $\displaystyle\int_E \varphi(g_n.x)d\mu_n(x) \to \int_E \varphi(g.x)d\mu(x)$. Cette convergence pour toute fonction $\varphi \in C(E)$ exprime la convergence faible de $g_{n*}\mu_n$ vers $g_*\mu$. D'où le résultat, en passant à la limite l'égalité $g_{n*}\mu_n = \mu_n$. □

Le résultat qui suit est dû à Moore [Mo, théorème 4 et lemme 9].

Théorème. — *Si G est simple, ϕ_I est injective dès que P^I est un sous-groupe parabolique propre. En général, ϕ_I est injective si et seulement si I ne contient aucune composante connexe de l'ensemble des racines simples. Dans ce cas, ϕ_I est bicontinue.*

Preuve. On va utiliser la formule d'intégration suivante, qui exprime la dérivée de Radon-Nikodym de $g_* m_I$ par rapport à m_I:

$$\int_{\mathcal{F}_I} \varphi(x) d(g_* m_I)(x) = \int_{K/K^I M} \varphi(kK^I M) e^{-2\langle \rho_I, H(g^{-1}k)\rangle} d(kK^I M).$$

Assertion ensembliste. — On fait la preuve dans le cas d'un groupe simple [GJT, 4.50].

Si I est l'ensemble des racines simples tout entier, la situation est claire. On obtient un singleton comme variété de drapeaux, et clairement pas d'injection.

Maintenant, on suppose à la fois que I est une partie propre de l'ensemble des racines simples et que ϕ_I est non injective. Il existe alors un élément g hors de K tel que $g_* m_I = m_I$. En passant à la décomposition de Cartan, on obtient un élément H de $\overline{\mathfrak{a}_+} \setminus \{0\}$ tel que $e^H_* m_I = m_I$. Si toute racine $\beta \in \Sigma^+_I := \Sigma^+ \setminus \Sigma^I$ était nulle sur H, e^H serait triviale sur la grosse cellule de G/P^I, et donc sur G/P^I tout entier par densité. Le noyau de l'action de G sur G/P^I serait propre et non trivial: impossible par simplicité. Par conséquent, il existe une racine $\beta \in \Sigma^+_I$ sur laquelle H est non nul. Mais par ailleurs, la formule préliminaire montre que $\exp H_* m_I = m_I$ équivaut à $\langle \rho_I, H(e^{-H}k)\rangle = 0$ pour tout $k \in K$. Ainsi $\langle \rho_I, H\rangle = 0$: contradiction.

On connaît désormais les stabilisateurs des mesures $g_* m$: on a $\mathrm{Stab}_G(g_* m) = gKg^{-1}$.

Assertions topologiques. — On reproduit la preuve de [GJT, 9.42] qui traite le cas du bord maximal $\mathcal{F}$. La continuité provient de la définition de la topologie faible-$*$ et de la formule préliminaire.

Réciproquement, on se donne une suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de G telle que $g_{n*} m$ tende vers $g_* m$ pour g dans G. On va utiliser la compactification intrinsèque de X – définie à partir de l'espace compact des sous-groupes fermés de G, et le lemme précédent.

Montrons d'abord que $g_n.o$ reste dans un compact de X. Si tel n'était pas le cas, quitte à extraire, on pourrait supposer que la suite $\{g_n\}_{n\geq 0}$ est fuyante, et même fondamentale. La suite de stabilisateurs $\{g_n K g_n^{-1}\}_{n\geq 0}$ tendrait alors vers un sous-groupe (distal non compact) de la frontière de la compactification intrinsèque [GJT, 9.14]. Cela dit, ce groupe limite devrait être par le lemme dans le stabilisateur de la mesure-limite $g_* m$, qui n'est autre que le sous-groupe compact gKg^{-1}: contradiction.

On sait maintenant que $\{g_n\}_{n\geq 0}$ reste dans un compact. Si g' en est une valeur d'adhérence, alors par injectivité de ϕ, on doit avoir $g'.o = g.o$ car $g_* m = g'_* m$. La suite bornée $\{g_n.o\}_{n\geq 0}$ n'ayant qu'une valeur d'adhérence possible $g.o$, elle tend vers $g.o$. □

2.E *Compactifications.* — On peut maintenant compactifier les espaces symétriques au moyen des probabilités sur un bord fidèle du groupe d'isométries.

Définition. — *Un bord G/P^I pour lequel l'application ϕ_I est injective est dit* fidèle. *Dans ce cas, l'adhérence $\overline{\phi_I(X)}$ est une* compactification de Furstenberg *de X.*

Les considérations de plus haut poids établissent un lien entre représentations et sous-groupes paraboliques. C'est un premier indice vers une possibilité d'identification avec d'autres compactifications, notamment celles de Satake. Le premier résultat de comparaison entre compactifications de Furstenberg et de Satake est un théorème de Moore [Mo, théorème 8].

3. Compactification de Furstenberg maximale

Dans cette section, on va travailler sur la compactification de Furstenberg maximale $\overline{X}^F = \overline{\phi(X)}$ de X, qui est obtenue à partir de l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi: & X & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(\mathcal{F}) \\ & gK & \mapsto & g_* m \end{array}$$

On veut tout d'abord décrire la frontière $\partial\overline{X}^F := \overline{X}^F \setminus X$.

3.A *Petits espaces symétriques. Petits bords. Mesures associées.* — Pour cela, on définit sur le bord maximal $\mathcal{F}$ des mesures de probabilité associées aux bords de Furstenberg maximaux des facteurs de Lévi des sous-groupes paraboliques de G.

Fixons I une partie de racines simples, reprenons les notations de 2.B et rappelons la définition d'autres objets associés à I. On désigne par Σ l'ensemble des racines restreintes de G relativement à A, dont un système positif Σ^+ est déterminé par le choix de P. On désigne par Σ^I l'ensemble des racines combinaisons linéaires des racines simples dans I, et on pose $\Sigma_I := \Sigma \backslash \Sigma^I$. On note $\mathfrak{a}_I$ l'espace vectoriel – qu'on voit comme une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{a}$ – formé des vecteurs de $\mathfrak{a}$ nuls contre toute racine de I, donc de Σ^I. Son orthogonal dans $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing est $\mathfrak{a}^I$. En exponentiant, on obtient deux sous-groupes $A^I < A$ et $A_I < A$. Si a est un élément de A, on désignera par a^I sa composante dans A^I, et a_I celle dans A_I.

La partie I définit aussi un sous-groupe semi-simple G^I de système de racines Σ^I, de sous-groupe compact maximal $K^I = G^I \cap K$. Ces sous-groupes permettent de décomposer plus finement le sous-groupe parabolique standard P^I en:

$$P^I = K^I MAN = (G^I M) A_I N_I,$$

ce qui montre en particulier que $P^I = K^I P$. Ces décompositions permettent aussi de définir deux sous-groupes de P^I, à savoir:

$$R^I := K^I M A_I N_I \text{ et } D^I := K^I M N_I.$$

Compte tenu de résultats de conjugaison de Moore et Guivarc'h respectivement, il serait logique d'appeler R^I le *sous-groupe moyennable maximal standard de type* Iet D^I le *sous-groupe distal maximal standard de type* I. En effet, quand I parcourt les ensembles de racines simples, on obtient un système complet de représentants des sous-groupes de G définis par chacune de ces propriétés. Rappelons qu'un automorphisme linéaire B est *distal* si son spectre est dans le cercle unité, ou de manière équivalente [GJT, 9.5], si l'adhérence de l'orbite de tout vecteur non nul sous le groupe $\{B^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ évite 0. Un groupe de Lie réel est *distal* si l'action adjointe de chacun de ses éléments est distale.

Considérons maintenant l'application orbite (dans l'espace symétrique X)

$$G^I \longrightarrow X$$

$$g \mapsto g.o$$

Puisque $K^I = G^I \cap K$ est un sous-groupe compact maximal de G^I, on obtient un plongement de l'espace symétrique X^I associé à G^I dans l'espace symétrique X.

Considérons aussi l'application orbite (dans le bord maximal $\mathcal{F}$)

$$\begin{aligned} P^I &\longrightarrow \mathcal{F} \\ g &\mapsto g.\omega \end{aligned}$$

Puisque $P^I = K^I P = G^I P$, on obtient deux descriptions de l'image de cette application: $K^I P$ permet de voir l'orbite $P^I.\omega$ comme un sous-espace fermé de $\mathcal{F} = G/P$; $G^I P$ permet de l'identifier à la variété des drapeaux complets de G^I, car $G^I \cap P$ est un sous-groupe parabolique minimal de G^I. Autrement dit, le bord de Furstenberg maximal de G^I est naturellement un sous-espace fermé de $\mathcal{F}$ contenant l'origine ω.

DÉFINITION. — (i) *On désigne par $\mathcal{F}^I$ la P^I-orbite de l'origine ω dans $\mathcal{F}$. C'est une copie naturelle du bord de Furstenberg maximal de G^I.*
(ii) *On note m^I l'unique probabilité K^I-invariante de support $\mathcal{F}^I$.*

La probabilité m^I permet de plonger le petit espace symétrique X^I dans l'espace des probabilités $\mathcal{M}_1(\mathcal{F})$. Il suffit pour cela de composer le plongement de X^I dans sa compactification de Furstenberg maximale – fermée par définition dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{F}^I)$, avec le plongement de $\mathcal{M}_1(\mathcal{F}^I)$ dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{F})$ – car $\mathcal{F}^I$ est fermé dans $\mathcal{F}$.

3.B *La frontière. Calcul de mesures limites.* — La frontière $\partial\overline{X}^F := \overline{X}^F \setminus X$ est formée des valeurs d'adhérence de suites fuyantes. Comme une sous-suite de suite fuyante est fuyante et comme toute suite fuyante admet une sous-suite fondamentale [GJT, 7.17], on est ramené à déterminer les limites de suites fondamentales.

Soient I une partie de racines simples et $\{k_n \exp H_n.o\}_{n\geq 0}$ une suite de points de l'espace symétrique X, avec $k_n \in K$ et $H_n \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. La suite est dite *$I$-fondamentale* si $\{k_n\}_{n\geq 0}$ converge dans K, si les distances des H_n aux murs de $\overline{\mathfrak{a}_+}$ d'indices dans I convergent – la composante H_n^I converge, et si les distances aux autres murs de $\overline{\mathfrak{a}_+}$ divergent. Une suite I-fondamentale de la forme $\{a_n.o = \exp H_n.o\}_{n\geq 0}$ est dite *I-canonique* si en outre les distances aux murs qui convergent sont en fait nulles, *i.e.*, $H_n^I = 0$ pour tout n. Géométriquement, les points $a_n.o$ restent dans la facette standard de type I alors que les distances aux autres murs standard divergent.

PROPOSITION. — (i) *Soit $\{k_n a_n.o\}_{n\geq 0}$ une suite I-fondamentale de l'espace symétrique X, avec $\lim a_n^I =: a^I$ et $\lim k_n =: k$. Alors, la suite $\{(k_n a_n)_* m\}_{n\geq 0}$ converge vers $(ka^I)_* m^I$.*
(ii) *La compactification de Furstenberg maximale $\overline{G_* m}$ est la réunion disjointe des orbites $G_* m^I$ quand I parcourt l'ensemble des parties de racines simples.*

Preuve [GJT, 9.8]. Point (i). Il suffit de régler le cas d'une suite I-canonique $\{a_n.o\}_{n\geq 0}$. L'application de projection $\pi_I : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_I$ est équivariante et pousse m sur m_I. On se donne μ une valeur d'adhérence de $\{a_{n*} m\}_{n\geq 0}$. Alors, $\pi_{I*}\mu$ est une valeur d'adhérence de $\{a_{n*}(\pi_I)_* m\}_{n\geq 0} = \{(\pi_I)_*(a_{n*} m)\}_{n\geq 0}$. Si $\varphi \in C(\mathcal{F}_I)$ est une fonction continue à support disjoint de $\{\omega_I\}$, on a

$$\int_{\mathcal{F}_I} \varphi d(a_{n*} m_I) = \frac{1}{c_I} \int_{\overline{N_I}} \varphi(a_n \overline{n} a_n^{-1} P^I) e^{-2\langle \rho_I, H(\overline{n})\rangle} d\overline{n}.$$

Par contraction – voir 2.B – et convergence dominée, l'intégrale tend vers 0. Ceci montre que $\pi_{I*}\mu$ est nécessairement δ_{ω_I} et que le support de μ est contenu dans $\mathcal{F}^I$. En outre, puisque K^I et A_I commutent, μ est fixe sous K^I: ce ne peut être que m^I. La suite de probabilités $\{a_{n*}m\}_{n\geq 0}$ n'ayant que m^I comme valeur d'adhérence possible, elle converge vers m^I.

Point (ii). Supposons qu'on ait $G_*m^I \cap G_*m^J \neq \varnothing$. Alors il existe g dans G tel que $g_*m^I = m^J$. En passant au support, cela donne $gP^I\omega = P^J\omega$, et donc $gP^I = P^J$. Finalement, $I = J$ et g est dans P^I, si bien qu'on a égalité des orbites. □

Remarque. — On a remarqué en 3.A qu'en voyant X^I comme $\{g_*m^I\}_{g\in G^I}$, on le plongeait dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{F})$. Les calculs de mesures limites ci-dessus montrent que ce plongement de X^I est en fait à valeurs dans la frontière de Furstenberg $\partial\overline{X}^F$.

3.C *Unicité d'écriture et identification.* — Pour l'identification, on va utiliser les arguments de [GJT, 3.28] – c'est-à-dire la naturalité des applications de domination entre compactifications. *Grosso modo*, on écrit un point du bord d'une compactification comme limite d'une suite fondamentale, on transporte la suite dans l'autre compactification et on attache au point initial la limite – qui existe – ainsi obtenue. Il s'agit surtout de montrer que les choix effectués sont inoffensifs, ce qu'on fait dans notre cas en discutant l'unicité d'écriture pour les mesures limites de suites fondamentales.

Lemme. — *On se donne deux suites de points de X. On suppose que la suite $\{k_n a_n^I a_{n,I}.o\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{k_n' a_n^{I'} a_{n,I'}.o\}_{n\geq 0}$) est I-fondamentale (resp. I'-fondamentale); et on pose $\lim a_n^I =: a^I$ et $\lim k_n =: k$ (resp. $\lim a_n^{I'} =: a^{I'}$ et $\lim k_n' =: k'$). Alors, les deux suites de probabilités sur $\mathcal{F}$ associées $\{(k_n a_n^I a_{n,I})_* m\}_{n\geq 0}$ et $\{(k_n' a_n^{I'} a_{n,I'})_* m\}_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite si et seulement si*

(i) *$I = I'$,*
(ii) *$a^I = a^{I'}$, et*
(iii) *$k'^{-1}k$ est dans $K^I \cap a^I K^I (a^I)^{-1} M$.*

Preuve [GJT, 9.45]. Par le point (ii) de 3.B, on sait déjà que $I = I'$, si bien qu'on travaille sur l'égalité $(ka)_*m = (k'a')_*m$. Par le même raisonnement sur les supports que ci-dessus, on obtient aussi $(a')^{-1}(k')^{-1}ka \in P^I$, et donc $(k')^{-1}k \in P^I$ puisque $A < P^I$. Ainsi, $(k')^{-1}k$ est dans $P^I \cap K = K^I M$. Puisque le stabilisateur de la mesure m^I est le groupe R^I – voir [GJT, 9.13], on a $(a')^{-1}(k')^{-1}ka \in G^I M \cap R^I = K^I M < K$. L'unicité du facteur radial dans la décomposition de Cartan fournit enfin $a = a'$. □

On obtient enfin le théorème de comparaison des compactifications. La compactification cellulaire duale de X est définie dans [GJT, 3.34-3.40]; la compactification de Satake maximale dans [GJT, 4.39]; enfin, la compactification intrinsèque dans [GJT, 9.4].

Théorème. — *Étant donné l'espace symétrique riemannien non compact X associé à G, les compactifications suivantes sont toutes G-isomorphes.*

(i) *La compactification cellulaire duale de X.*
(ii) *La compactification intrinsèque de X.*
(iii) *La compactification de Satake maximale de X.*
(iv) *La compactification de Furstenberg maximale de X.* □

Remarque. — Cette identification est l'occasion de signaler une confusion possible, relative à la traduction du terme «boundary» en français. Suivant le contexte, on doit choisir entre «frontière» au sens topologique et «bord» au sens de Furstenberg. Ainsi, la variété des drapeaux complets $\mathcal{F} = G/P$ est le bord maximal à partir duquel on construit la compactification de Furstenberg, qui se prête à tant de points de vue. Mais $\mathcal{F}$ est également liée à l'immeuble à l'infini $X(\infty)$ de l'espace symétrique X – donc à la frontière de la compactification géométrique. Il s'agit de l'ensemble des chambres à l'infini de $X(\infty)$.

3.D *Caractérisation de* $\overline{X}^F$. — Reconnaître la compactification de Furstenberg maximale permet d'en donner une caractérisation en termes d'action du groupe G – voir [GJT, 9.56].

Théorème. — *La compactification de Furstenberg maximale* $\overline{X}^F$ *est caractérisée par les propriétés suivantes.*

(i) *Elle admet une action continue de* G.
(ii) *Pour toute partie* I *de racines simples, il existe un plongement* P^I*-équivariant*

$$\iota_I : X^I \longrightarrow \overline{X}^F,$$

pour lequel on note $X^I_\infty := \iota_I(X^I)$ *et* $o_I := \iota_I(o_I)$.
(iii) *La compactification* $\overline{X}^F$ *est recouverte par les* G*-translatés* gX^I_∞, *qui vérifient la propriété d'incidence:* $gX^I_\infty \cap X^J_\infty \neq \varnothing \Longrightarrow I = J$ *et* $g \in P^I$.
(iv) *L'adhérence de la chambre de Weyl* $A^+.o$ *dans* $\overline{X}^F$ *est la réunion des adhérences* $\overline{A^{I,+}.o_I}$.
(v) *Pour deux parties* I *et* J *de racines simples, une suite* $\{a_n.o\}_{n\geq 0}$ *de points de* $\overline{A^{I,+}.o_I}$ *converge vers* $a.o_J \in \overline{A^{J,+}.o_J}$ *si et seulement si:* $J \subset I$, *pour toute racine simple* α *dans* J, $\alpha(\mathrm{Log}a_n)$ *tend vers* $\alpha(\mathrm{Log}a)$ *et pour toute racine simple* α *dans* $I \setminus J$, $\alpha(\mathrm{Log}a_n)$ *diverge.* □

Remarque. — Pour se convaincre qu'avec les compactifications géométrique et de Furstenberg on a bien deux compactifications différentes, il suffit de regarder les stabilisateurs de points à la frontière.

Références

[B] N. Bourbaki, Intégration I-IV, Hermann, 1965.
[F] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math. **26** (1972), 193-229.
[GH] É. Ghys, P. de la Harpe, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Progress in Math. **83**, Birkhäuser, 1990.
[GJT] Y. Guivarc'h, L. Ji, J.C. Taylor, Compactifications of symmetric spaces, Progress in Math. **156**, Birkhäuser, 1998.
[Ma] G.A. Margulis, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete (3) **17**, Springer, 1991.
[Mo] C.C. Moore, *Compactifications of symmetric spaces*, Amer. J. Math. **86** (1964), 201-218.
[P] J.-P. Pier, Amenable locally compact groups, John Wiley, 1984.

Bertrand RÉMY 24 février 2000.